



Introduction à l'étude des modèles physiques par des outils stochastiques

Cane Gaëtan
LJAD, UCA

TSMS

16 Janvier 2022



PARTIE I

Introduction aux probabilités

Rappels de probabilités

- Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable.
- On dit que \mathbb{P} est une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) si et seulement si $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Rappels de probabilités

- Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable.
- On dit que \mathbb{P} est une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) si et seulement si $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- On dit que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si et seulement si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable.

Rappels de probabilités

- Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable.
- On dit que \mathbb{P} est une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) si et seulement si $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- On dit que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si et seulement si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable.
- On dit que X a pour loi μ si et seulement si :

$$\forall A \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \in A) = \int_A d\mu(x) = \int_A f(x)dx .$$

Rappels de probabilités

- Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable.
- On dit que \mathbb{P} est une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) si et seulement si $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- On dit que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si et seulement si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable.
- On dit que X a pour loi μ si et seulement si :

$$\forall A \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \in A) = \int_A d\mu(x) = \int_A f(x)dx .$$

- Soit g une fonction mesurable alors on a :

$$\mathbb{E}_\mu [g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx .$$

Rappels de probabilités

- Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable.
- On dit que \mathbb{P} est une mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) si et seulement si $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- On dit que X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si et seulement si $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable.

- On dit que X a pour loi μ si et seulement si :

$$\forall A \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \in A) = \int_A d\mu(x) = \int_A f(x)dx .$$

- Soit g une fonction mesurable alors on a :

$$\mathbb{E}_\mu [g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx .$$

- $\mathbb{E}[X]$ représente la moyenne de la variable aléatoire X .

Un exemple de variable aléatoire discrète

On lance une pièce équilibrée.

On note X la variable aléatoire qui vaut -1 si le résultat de la pièce est pile et 1 sinon.

Un exemple de variable aléatoire discrète

On lance une pièce équilibrée.

On note X la variable aléatoire qui vaut -1 si le résultat de la pièce est pile et 1 sinon.

Question : Quelle est la loi de X ?

Un exemple de variable aléatoire discrète

On lance une pièce équilibrée.

On note X la variable aléatoire qui vaut -1 si le résultat de la pièce est pile et 1 sinon.

Question : Quelle est la loi de X ?

2 résultats possibles : $\{-1, 1\}$.

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2} .$$

Un exemple de variable aléatoire discrète

On lance une pièce équilibrée.

On note X la variable aléatoire qui vaut -1 si le résultat de la pièce est pile et 1 sinon.

Question : Quelle est la loi de X ?

2 résultats possibles : $\{-1, 1\}$.

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Réponse : Quelle est la loi de X ?

$$\mu(\cdot) = \frac{\delta_{-1}(\cdot)}{2} + \frac{\delta_1(\cdot)}{2}.$$

Un exemple de variable aléatoire discrète

On lance une pièce équilibrée.

On note X la variable aléatoire qui vaut -1 si le résultat de la pièce est pile et 1 sinon.

Question : Quelle est la loi de X ?

2 résultats possibles : $\{-1, 1\}$.

$$\mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Réponse : Quelle est la loi de X ?

$$\mu(\cdot) = \frac{\delta_{-1}(\cdot)}{2} + \frac{\delta_1(\cdot)}{2}.$$

On dit que X est une variable aléatoire discrète.

Un exemple de variable aléatoire continue

Soit $\lambda > 0$, on note f la fonction définie par :

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{x>0}(x).$$

Un exemple de variable aléatoire continue

Soit $\lambda > 0$, on note f la fonction définie par :

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{x>0}(x).$$

On note X la variable aléatoire de densité f . Alors :

$$\forall A \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x) dx.$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X = y) = 0.$$

$$\mathbb{E}[X] = \lambda^{-1}$$

Un exemple de variable aléatoire continue

Soit $\lambda > 0$, on note f la fonction définie par :

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{x>0}(x).$$

On note X la variable aléatoire de densité f . Alors :

$$\forall A \subset \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f(x) dx.$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(X = y) = 0.$$

$$\mathbb{E}[X] = \lambda^{-1}$$

On dit que X est une variable aléatoire continue.

X suit une loi exponentielle, elle modélise les temps d'attentes du bus, du tram, à la poste etc...

Plus λ est petit et plus le temps est grand.

Introduction de la loi Gaussienne

On dit que X est une variable aléatoire gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_A \exp\left(-\frac{|x - m|^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Introduction de la loi Gaussienne

On dit que X est une variable aléatoire gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_A \exp\left(-\frac{|x - m|^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

En particulier, si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ on a :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Introduction de la loi Gaussienne

On dit que X est une variable aléatoire gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_A \exp\left(-\frac{|x - m|^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

En particulier, si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ on a :

$$\mathbb{P}(X \in A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

On a :

$$\mathbb{E}[X] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[X^2] = 1.$$

Marches aléatoires

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **i.i.d** vérifiant:

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Marches aléatoires

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **i.i.d** vérifiant:

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ on définit :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \text{ et } \mathbb{E}[S_N] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[S_N^2] = N.$$

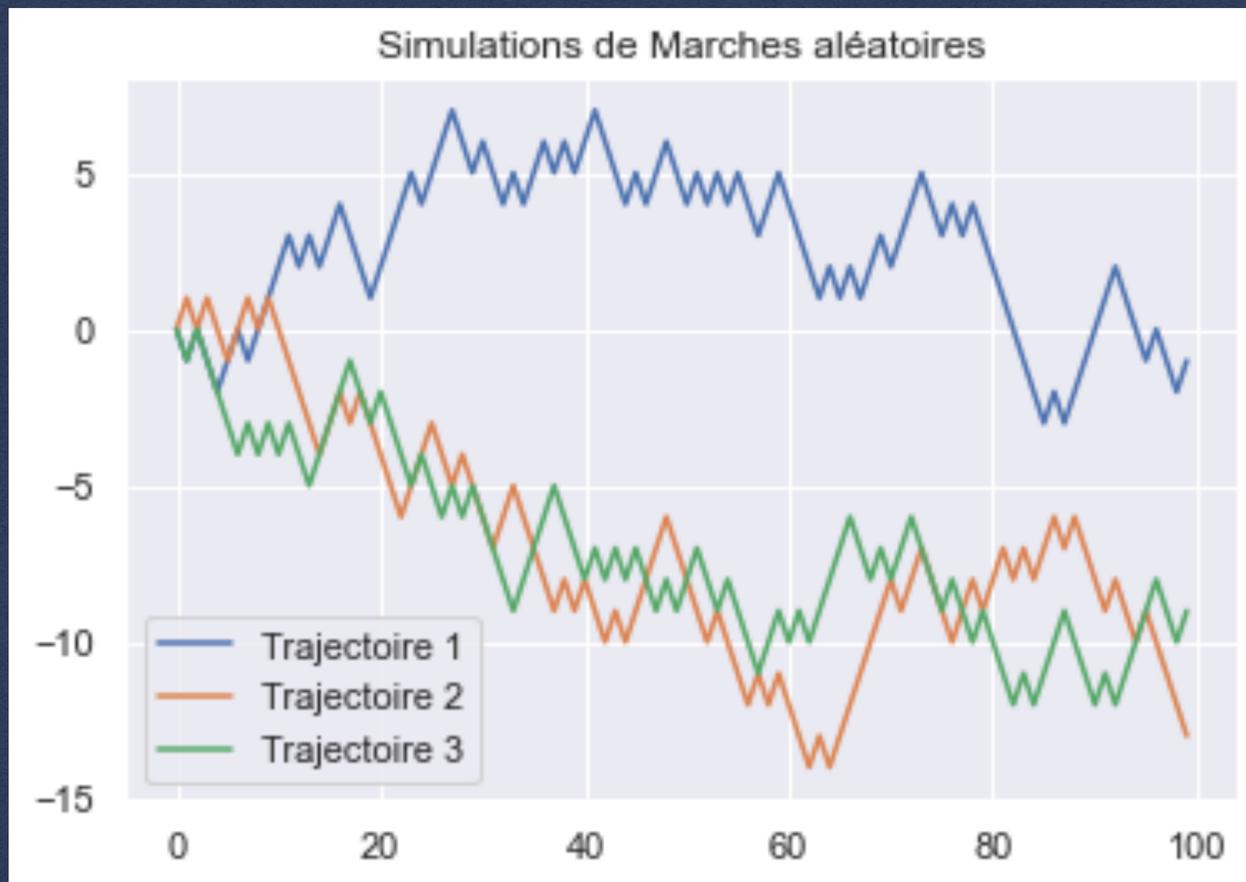
Marches aléatoires

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **i.i.d** vérifiant:

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ on définit :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \text{ et } \mathbb{E}[S_N] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[S_N^2] = N.$$



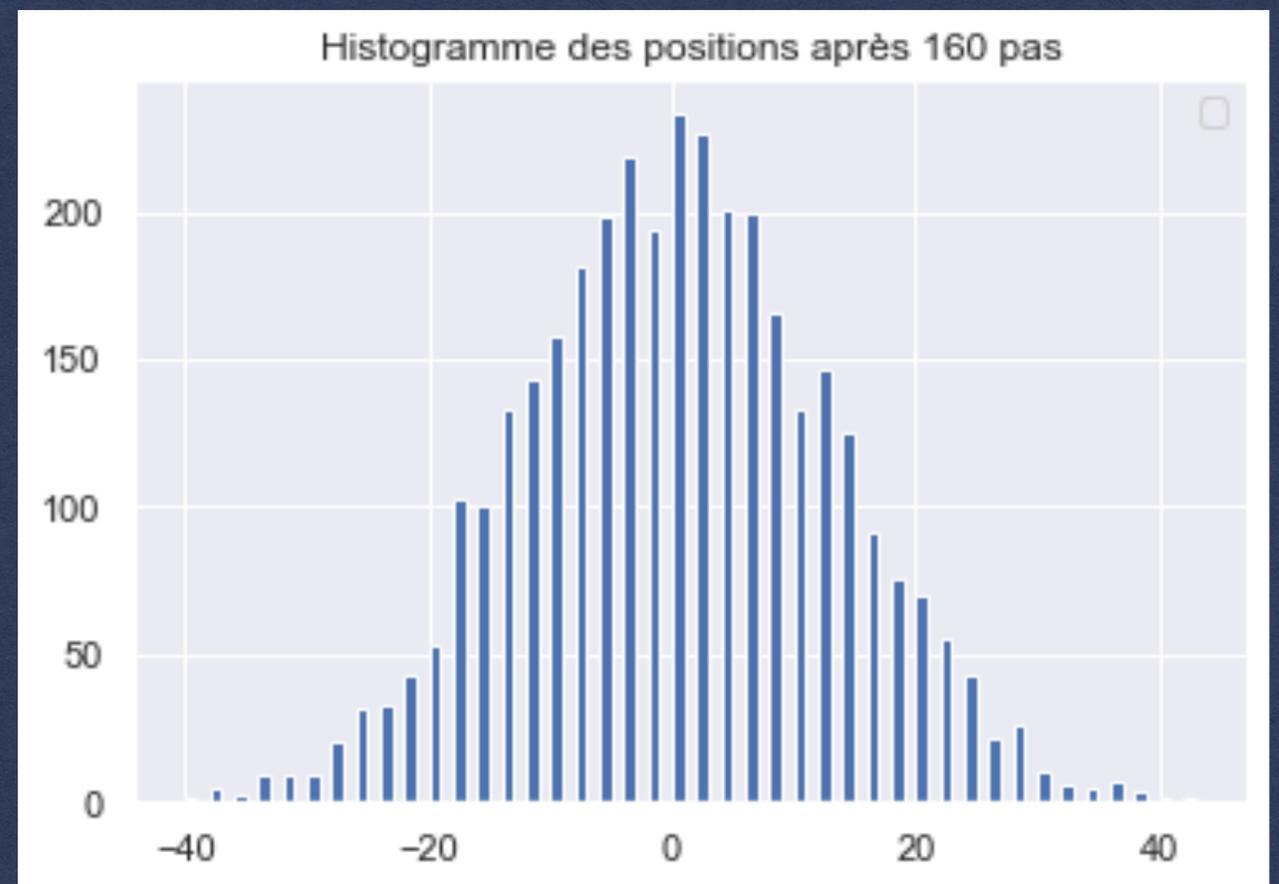
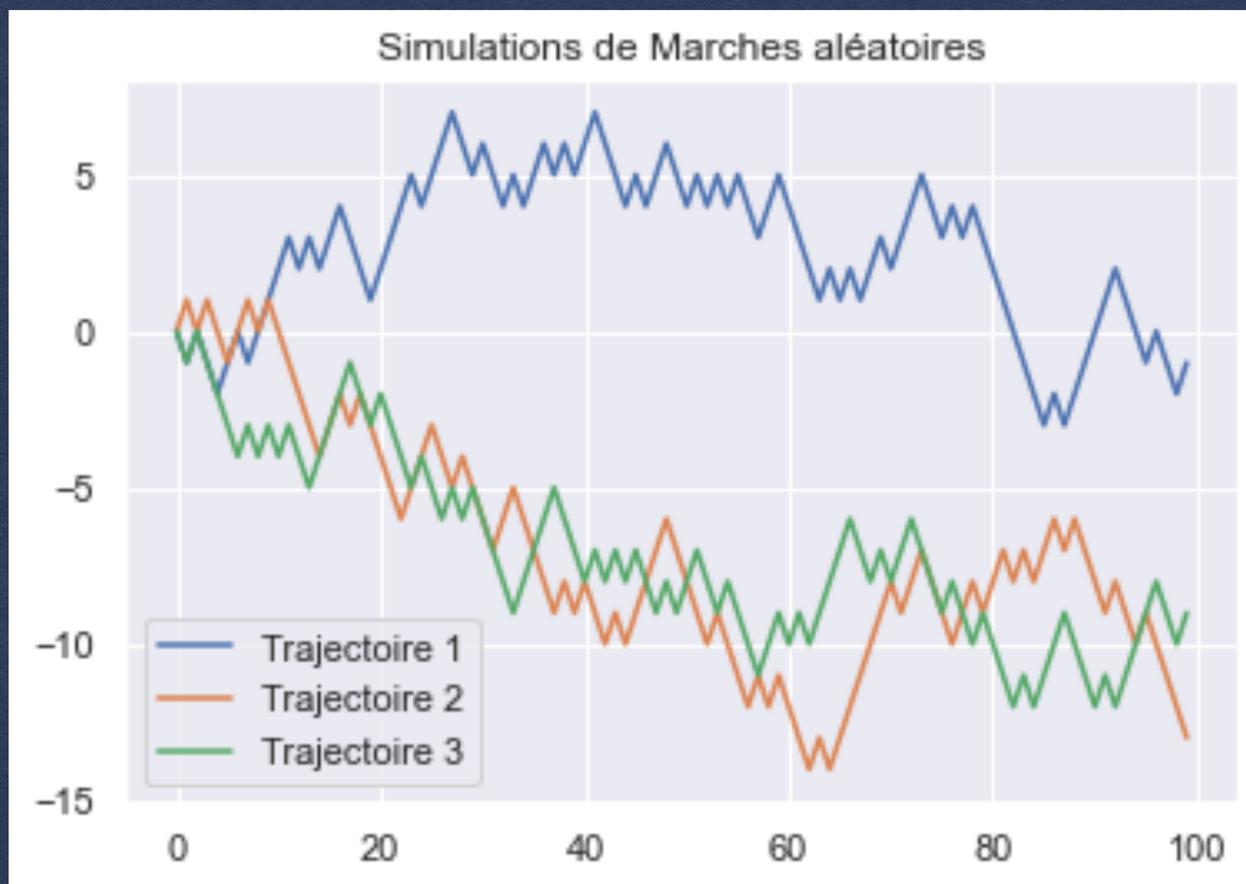
Marches aléatoires

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **i.i.d** vérifiant:

$$\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = -1) = \frac{1}{2}.$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ on définit :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \text{ et } \mathbb{E}[S_N] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[S_N^2] = N.$$



Du temps discret au temps continue

On peut montrer que $N^{-1}S_N$ converge vers une $\mathcal{N}(0,1)$.

Du temps discret au temps continue

On peut montrer que $N^{-1}S_N$ converge vers une $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit u dans \mathbb{R} et $t \geq 0$ on définit :

$$\mathcal{B}_u^N(t) = u + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor N^2 t \rfloor} X_n.$$

Du temps discret au temps continue

On peut montrer que $N^{-1}S_N$ converge vers une $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit u dans \mathbb{R} et $t \geq 0$ on définit :

$$\mathcal{B}_u^N(t) = u + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor N^2 t \rfloor} X_n.$$

- $\mathcal{B}_u^N(1) \rightarrow \mathcal{N}(u,1)$ par le résultat précédent.

Du temps discret au temps continue

On peut montrer que $N^{-1}S_N$ converge vers une $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit u dans \mathbb{R} et $t \geq 0$ on définit :

$$\mathcal{B}_u^N(t) = u + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor N^2 t \rfloor} X_n.$$

- $\mathcal{B}_u^N(1) \rightarrow \mathcal{N}(u,1)$ par le résultat précédent.
- $\mathcal{B}_u^N(\cdot) \rightarrow \mathcal{B}_u(\cdot)$ où $\mathcal{B}_u(\cdot)$ est un mouvement Brownien sur \mathbb{R} partant de u .

Du temps discret au temps continue

On peut montrer que $N^{-1}S_N$ converge vers une $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit u dans \mathbb{R} et $t \geq 0$ on définit :

$$\mathcal{B}_u^N(t) = u + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor N^2 t \rfloor} X_n.$$

- $\mathcal{B}_u^N(1) \rightarrow \mathcal{N}(u,1)$ par le résultat précédent.
- $\mathcal{B}_u^N(\cdot) \rightarrow \mathcal{B}_u(\cdot)$ où $\mathcal{B}_u(\cdot)$ est un mouvement Brownien sur \mathbb{R} partant de u .
- $\mathcal{B}_u(t)$ a pour densité f_u où :

$$f_u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{|x - u|^2}{2t}\right).$$

Du temps discret au temps continue

On peut montrer que $N^{-1}S_N$ converge vers une $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit u dans \mathbb{R} et $t \geq 0$ on définit :

$$\mathcal{B}_u^N(t) = u + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor N^2 t \rfloor} X_n.$$

- $\mathcal{B}_u^N(1) \rightarrow \mathcal{N}(u,1)$ par le résultat précédent.
- $\mathcal{B}_u^N(\cdot) \rightarrow \mathcal{B}_u(\cdot)$ où $\mathcal{B}_u(\cdot)$ est un mouvement Brownien sur \mathbb{R} partant de u .
- $\mathcal{B}_u(t)$ a pour densité f_u où :

$$f_u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{|x - u|^2}{2t}\right).$$

Ainsi $\mathcal{B}_u(t) \sim \mathcal{N}(u, t)$.

Équation de la chaleur

Soit ρ_0 une fonction lisse. On définit :

$$\rho(t, u) = \mathbb{E} \left[\rho_0 (\mathcal{B}_u(t)) \right]$$

Équation de la chaleur

Soit ρ_0 une fonction lisse. On définit :

$$\begin{aligned}\rho(t, u) &= \mathbb{E} \left[\rho_0 (\mathcal{B}_u(t)) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x) f_u(t, x) dx\end{aligned}$$

Équation de la chaleur

Soit ρ_0 une fonction lisse. On définit :

$$\begin{aligned}\rho(t, u) &= \mathbb{E} \left[\rho_0 (\mathcal{B}_u(t)) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x) f_u(t, x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x) \exp \left(-\frac{|x - u|^2}{2t} \right) dx.\end{aligned}$$

Équation de la chaleur

Soit ρ_0 une fonction lisse. On définit :

$$\begin{aligned}\rho(t, u) &= \mathbb{E} \left[\rho_0(\mathcal{B}_u(t)) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x) f_u(t, x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \rho_0(x) \exp \left(-\frac{|x - u|^2}{2t} \right) dx.\end{aligned}$$

On peut montrer que ρ est solution de :

$$\partial_t \rho(t, u) = \frac{1}{2} \Delta[\rho](t, u).$$

Le mouvement Brownien induit de la diffusion.



Un regard sur ce que nous avons fait

- La trajectoire de nos particules est codée par X_n .

Un regard sur ce que nous avons fait

- La trajectoire de nos particules est codée par X_n .
- S_N représente la trajectoire d'une particule.

Un regard sur ce que nous avons fait

- La trajectoire de nos particules est codée par X_n .
- S_N représente la trajectoire d'une particule.
- On scale en temps et en espace $N^{-1}S_{[Nt]} \rightarrow \rho$.

Un regarde sur ce que nous avons fait

- La trajectoire de nos particules est codée par X_n .
- S_N représente la trajectoire d'une particule.
- On scale en temps et en espace $N^{-1}S_{[Nt]} \rightarrow \rho$.

En faisant un scaling en temps et en espace pour un grand nombre de particules on observe quelque chose macroscopiquement.

BIENVENU DANS LA PHYSIQUE STATISTIQUE !



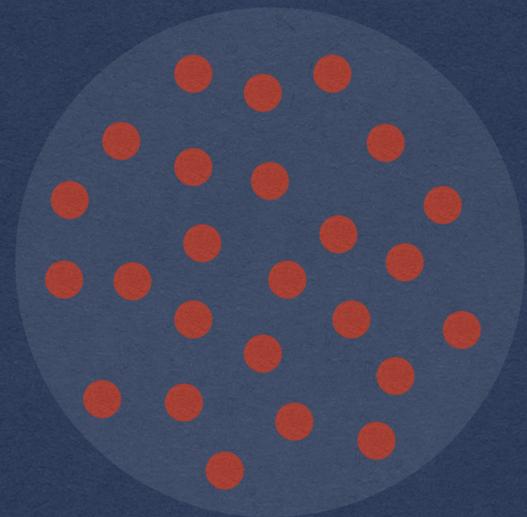
PARTIE II

Étude d'une chaîne d'oscillateurs
harmoniques bruitée soumise à un champ
magnétique

Motivations

1953 : Première expérience numérique par Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou.

→ Comprendre la diffusion d'énergie dans les chaînes d'oscillateurs anharmoniques.



Échelle microscopique

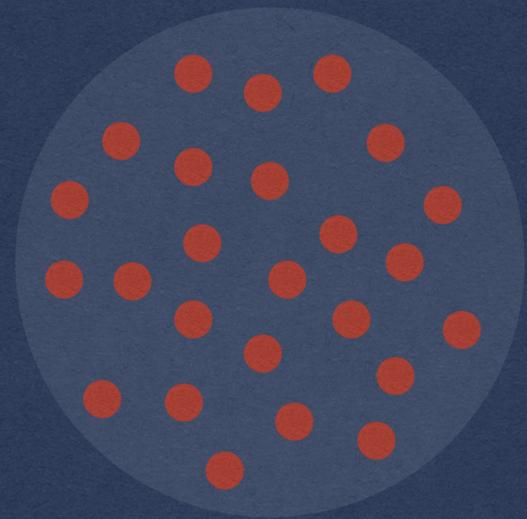


Propriétés macroscopiques

Motivations

1953 : Première expérience numérique par Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou.

→ Comprendre la diffusion d'énergie dans les chaînes d'oscillateurs anharmoniques.



Échelle microscopique



Propriétés macroscopiques

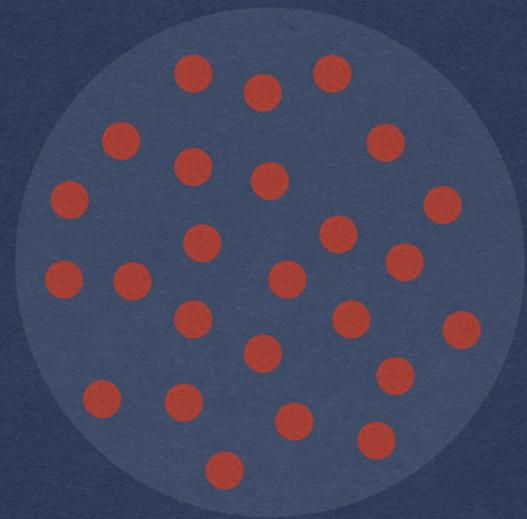
2014 : Théorie formelle de Spohn

- Système avec de nombreuses quantités conservées (énergie, moment,...) et interactions locales.
- Classes d'universalités (diffusion, diffusion fractionnaire...)

Motivations

1953 : Première expérience numérique par Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou.

→ Comprendre la diffusion d'énergie dans les chaînes d'oscillateurs anharmoniques.



Échelle microscopique



Propriétés macroscopiques

2014 : Théorie formelle de Spohn

- Système avec de nombreuses quantités conservées (énergie, moment,...) et interactions locales.
- Classes d'universalités (diffusion, diffusion fractionnaire...)

Peu de résultats théoriques : Jara, Komorowski et Olla en 2015.



Les changements d'échelles

Échelle microscopique

Le système de particules est régi
par les lois de Newton

Les changements d'échelles

Échelle microscopique

Le système de particules est régi
par les lois de Newton

Limite cinétique



Échelle mésoscopique

Équation de Boltzmann
$$\partial_t f + v \nabla f = Q[f]$$

Les changements d'échelles

Échelle microscopique

Le système de particules est régi
par les lois de Newton

Limite cinétique



Échelle mésoscopique

Équation de Boltzmann
 $\partial_t f + v \nabla f = Q[f]$

Limite
hydrodynamique



Échelle macroscopique

Équation de la chaleur
 $\partial_t \rho = \Delta[\rho]$

Les changements d'échelles

Échelle microscopique

Le système de particules est régi par les lois de Newton

Limite cinétique

Échelle mésoscopique

Équation de Boltzmann
 $\partial_t f + v \nabla f = Q[f]$

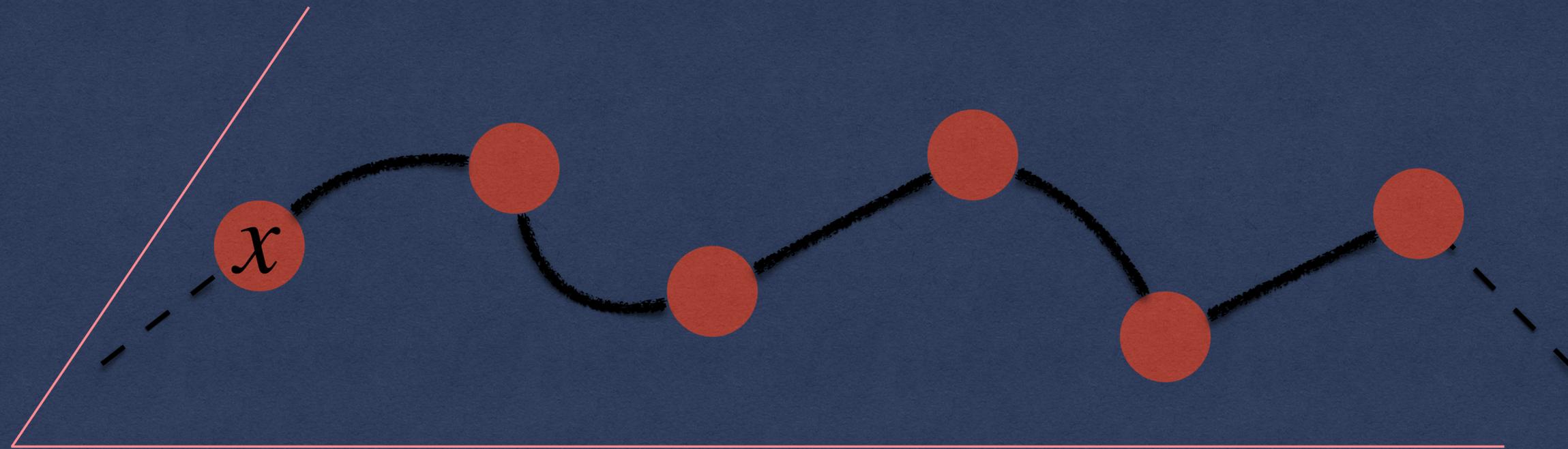
Limite hydrodynamique

Échelle macroscopique

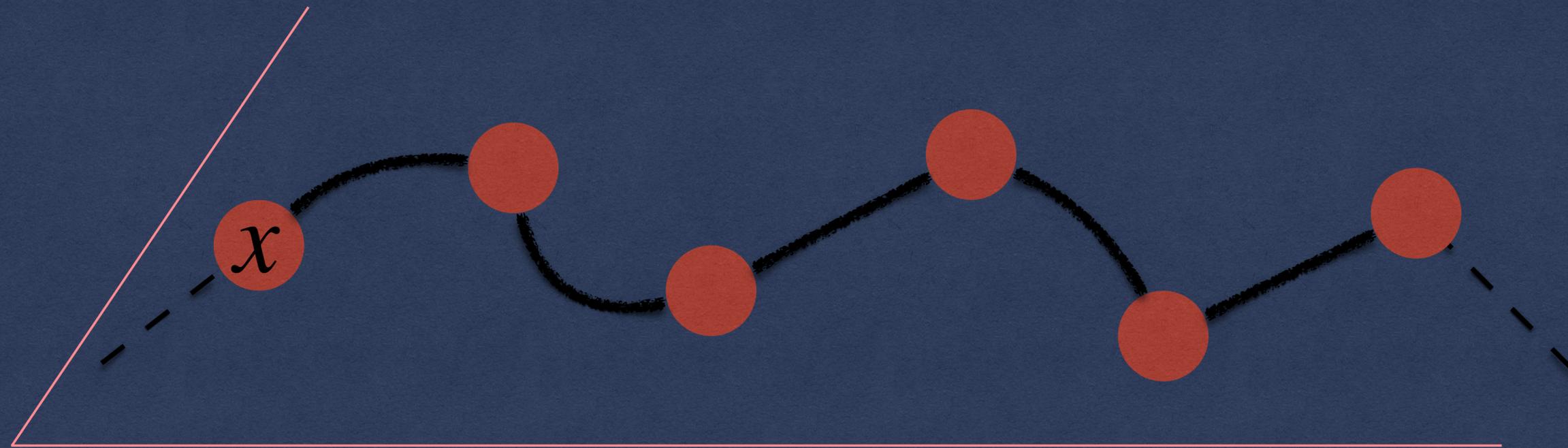
Équation de la chaleur
 $\partial_t \rho = \Delta[\rho]$

Limite hydrodynamique

Présentation de la chaîne harmonique dans \mathbb{R}^2



Présentation de la chaîne harmonique dans \mathbb{R}^2

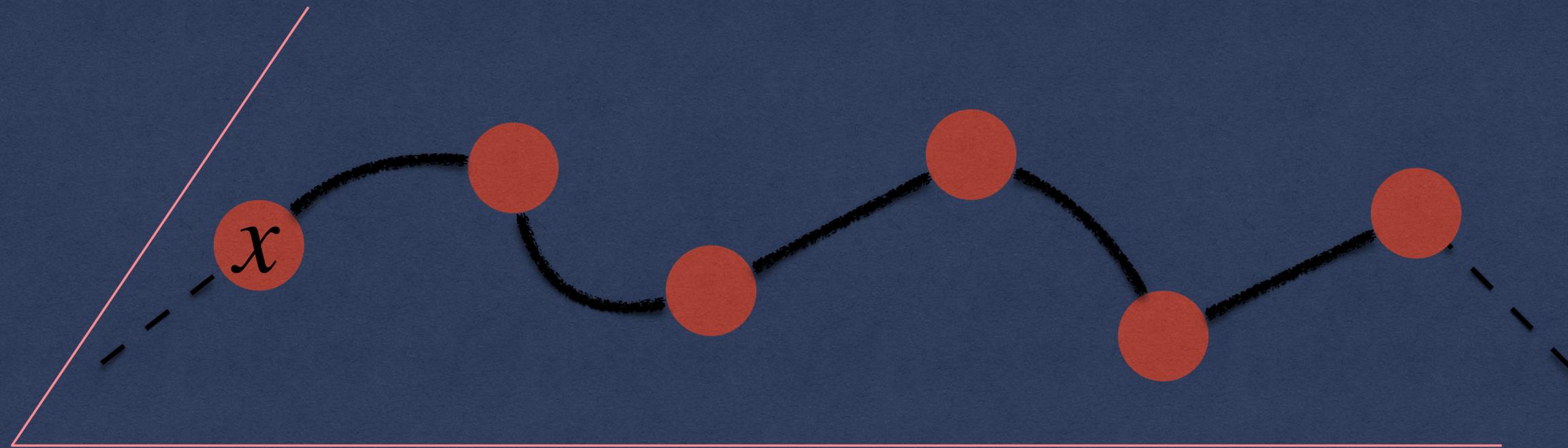


$$\frac{d}{dt}q_i(t, x) = p_i(t, x)$$

Échelle
microscopique

$$\frac{d}{dt}p_i(t, x) = q_i(t, x + 1) + q_i(t, x - 1) - 2q_i(t, x)$$

Présentation de la chaîne harmonique dans \mathbb{R}^2



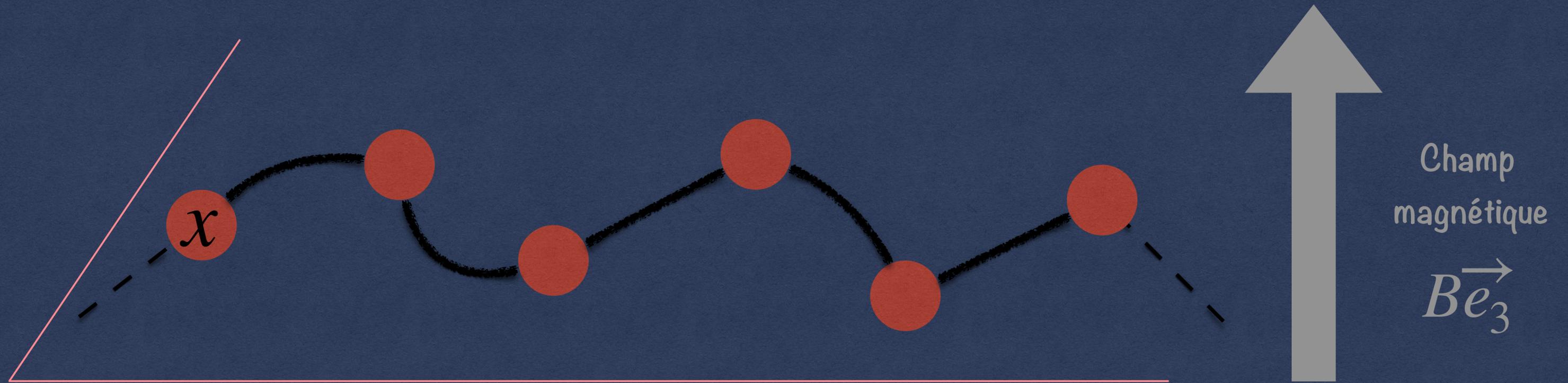
$$\frac{d}{dt}q_i(t, x) = p_i(t, x)$$

Échelle
microscopique

$$\frac{d}{dt}p_i(t, x) = q_i(t, x + 1) + q_i(t, x - 1) - 2q_i(t, x)$$

$+\varepsilon$ bruit.

Présentation de la chaîne harmonique dans \mathbb{R}^2



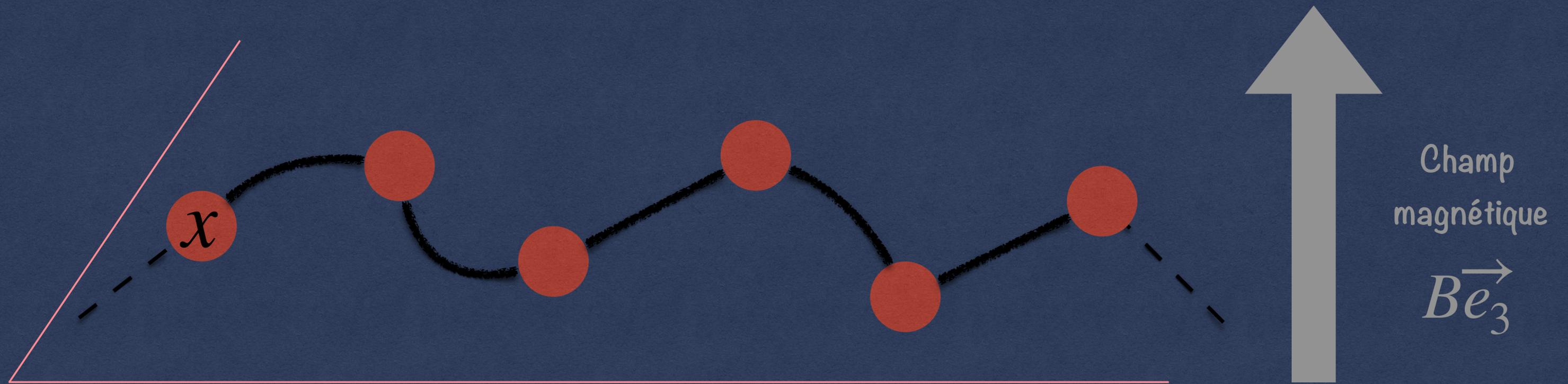
$$\frac{d}{dt}q_i(t, x) = p_i(t, x)$$

Échelle
microscopique

$$\frac{d}{dt}p_i(t, x) = q_i(t, x + 1) + q_i(t, x - 1) - 2q_i(t, x)$$

$+\varepsilon$ bruit.

Présentation de la chaîne harmonique dans \mathbb{R}^2

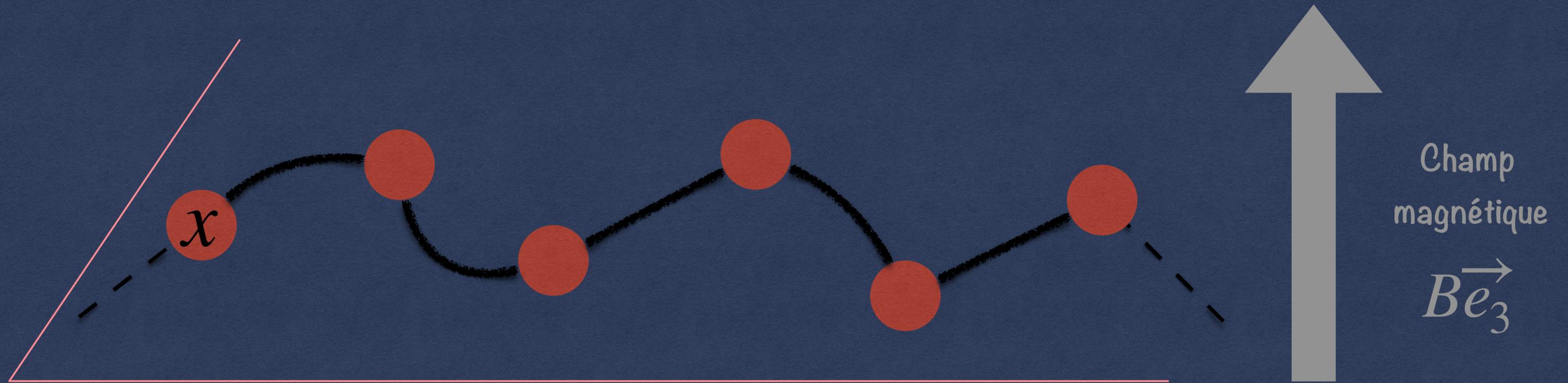


$$\frac{d}{dt}q_i(t, x) = p_i(t, x)$$

Échelle
microscopique

$$\frac{d}{dt}p_i(t, x) = q_i(t, x + 1) + q_i(t, x - 1) - 2q_i(t, x) + B(\delta_{i,1}p_2(t, x) - \delta_{i,2}p_1(t, x)) + \varepsilon \text{ bruit.}$$

Présentation de la chaîne harmonique dans \mathbb{R}^2



$$\frac{d}{dt}q_i(t, x) = p_i(t, x)$$

Échelle
microscopique

$$\frac{d}{dt}p_i(t, x) = q_i(t, x + 1) + q_i(t, x - 1) - 2q_i(t, x) + B(\delta_{i,1}p_2(t, x) - \delta_{i,2}p_1(t, x)) + \varepsilon \text{ bruit.}$$

Générateur Infinitésimal :

$$\mathcal{L} + \varepsilon \mathcal{S}.$$



Objectif de l'étude

Objectif de l'étude

La dynamique préserve l'énergie et le moment.

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} |p(t, x)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} |q(t, x+1) - q(t, x-1)|^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}} e(t, x).$$

$$P(t) = \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}} (p_1(t, x) - Bq_2(t, x)), \sum_{x \in \mathbb{Z}} (p_2(t, x) + Bq_1(t, x)) \right).$$

Objectif de l'étude

La dynamique préserve l'énergie et le moment.

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} |p(t, x)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} |q(t, x+1) - q(t, x-1)|^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}} e(t, x).$$

$$P(t) = \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}} (p_1(t, x) - Bq_2(t, x)), \sum_{x \in \mathbb{Z}} (p_2(t, x) + Bq_1(t, x)) \right).$$

On note μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Objectif de l'étude

La dynamique préserve l'énergie et le moment.

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} |p(t, x)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} |q(t, x+1) - q(t, x-1)|^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}} e(t, x).$$

$$P(t) = \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}} (p_1(t, x) - Bq_2(t, x)), \sum_{x \in \mathbb{Z}} (p_2(t, x) + Bq_1(t, x)) \right).$$

On note μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Hypothèse naturelle sur le système :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_{x \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon x) \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}[e(0, x)] = \int_{\mathbb{R}} J(u) \mathcal{W}_0(u) du.$$

Échelle
macroscopique

Objectif de l'étude

La dynamique préserve l'énergie et le moment.

$$E(t) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} |p(t, x)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathbb{Z}} |q(t, x+1) - q(t, x-1)|^2 = \sum_{x \in \mathbb{Z}} e(t, x).$$

$$P(t) = \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}} (p_1(t, x) - Bq_2(t, x)), \sum_{x \in \mathbb{Z}} (p_2(t, x) + Bq_1(t, x)) \right).$$

On note μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Hypothèse naturelle sur le système :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_{x \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon x) \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}[e(0, x)] = \int_{\mathbb{R}} J(u) \mathcal{W}_0(u) du.$$

Échelle
macroscopique

Peut-on avoir une équation macroscopique pour le profil d'énergie ?

Distribution de Wigner

$$\forall (t, k) \in [0, T] \times \mathbb{T}, \quad \widehat{\psi}_2(t, k) = \theta_{2,B}(k) \left[\widehat{p}_1(t, k) - \mathbf{i}\omega_1(k)\widehat{q}_1(t, k) - \widehat{p}_2(t, k) - \omega_1(k)\widehat{q}_2(t, k) \right].$$

$$\widehat{\psi}_1(t, k) = \theta_{1,B}(k) \left[\widehat{p}_1(t, k) - \mathbf{i}\omega_2(k)\widehat{q}_1(t, k) + \widehat{p}_2(t, k) + \omega_2(k)\widehat{q}_2(t, k) \right].$$

$$\longrightarrow \|\widehat{\psi}_1(t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}^2 + \|\widehat{\psi}_2(t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}^2 = E(t).$$

Distribution de Wigner

$$\forall (t, k) \in [0, T] \times \mathbb{T}, \quad \widehat{\psi}_2(t, k) = \theta_{2,B}(k) \left[\widehat{p}_1(t, k) - i\omega_1(k) \widehat{q}_1(t, k) - i\widehat{p}_2(t, k) - \omega_1(k) \widehat{q}_2(t, k) \right].$$

$$\widehat{\psi}_1(t, k) = \theta_{1,B}(k) \left[\widehat{p}_1(t, k) - i\omega_2(k) \widehat{q}_1(t, k) + i\widehat{p}_2(t, k) + \omega_2(k) \widehat{q}_2(t, k) \right].$$

$$\longrightarrow \|\widehat{\psi}_1(t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}^2 + \|\widehat{\psi}_2(t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}^2 = E(t).$$

On définit $\mathcal{W}^\varepsilon : [0, T] \rightarrow (S \times S)'$ pour tout $J = (J_1, J_2)$ par :

$$\langle \mathcal{W}^\varepsilon(t), J \rangle = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{y \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} dk \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon} \left[\psi_i(t\varepsilon^{-1}, x) \psi_i(t\varepsilon^{-1}, y) \right] \exp(-2i\pi k[y - x]) J_i \left(\frac{\varepsilon(x + y)}{2}, k \right).$$

Distribution de Wigner

$$\forall (t, k) \in [0, T] \times \mathbb{T}, \quad \widehat{\psi}_2(t, k) = \theta_{2,B}(k) \left[\widehat{p}_1(t, k) - i\omega_1(k) \widehat{q}_1(t, k) - i\widehat{p}_2(t, k) - \omega_1(k) \widehat{q}_2(t, k) \right].$$

$$\widehat{\psi}_1(t, k) = \theta_{1,B}(k) \left[\widehat{p}_1(t, k) - i\omega_2(k) \widehat{q}_1(t, k) + i\widehat{p}_2(t, k) + \omega_2(k) \widehat{q}_2(t, k) \right].$$

$$\longrightarrow \|\widehat{\psi}_1(t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}^2 + \|\widehat{\psi}_2(t)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})}^2 = E(t).$$

On définit $\mathcal{W}^\varepsilon : [0, T] \rightarrow (S \times S)'$ pour tout $J = (J_1, J_2)$ par :

$$\langle \mathcal{W}^\varepsilon(t), J \rangle = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{y \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} dk \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon} \left[\psi_i(t\varepsilon^{-1}, x) \psi_i(t\varepsilon^{-1}, y) \right] \exp(-2i\pi k[y - x]) J_i \left(\frac{\varepsilon(x + y)}{2}, k \right).$$

Soit J une fonction lisse sur \mathbb{R} alors :

$$\langle \mathcal{W}^\varepsilon(t), J \rangle = \varepsilon \sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon} \left[e(t\varepsilon^{-1}, x) \right] J(\varepsilon x) + \mathcal{O}_J(\varepsilon).$$

Pour comprendre le comportement macroscopique de l'énergie, nous devons étudier celui de \mathcal{W}^ε .

Équation de Boltzmann linéaire

\mathcal{W}^ε converge vers $f = (f_1, f_2)$ où :

$$\partial_t f_i(t, u, k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi} \partial_u f_i(t, u, k) = [\mathcal{L}_B f]_i(t, u, k).$$

Échelle
mésoscopique

- Résultat prouvé pour $B = 0$ par Basile, Komorowski et Olla en 2009.
- Résultat prouvé pour $B \neq 0$ par Saito, Sasada et Suda en 2018.

Équation de Boltzmann linéaire

\mathcal{W}^ε converge vers $f = (f_1, f_2)$ où :

$$\partial_t f_i(t, u, k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi} \partial_u f_i(t, u, k) = [\mathcal{L}_B f]_i(t, u, k).$$

Échelle
mésoscopique

- Résultat prouvé pour $B = 0$ par Basile, Komorowski et Olla en 2009.
- Résultat prouvé pour $B \neq 0$ par Saito, Sasada et Suda en 2018.

$$[\mathcal{L}_B f]_i(t, u, k) = \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{T}} \theta_{i,B}^2(k) R(k, k') \theta_{j,B}^2(k') (f_j(t, u, k') - f_i(t, u, k)) dk'.$$

$$\mathbf{v}_B(k) = \frac{\sin(\pi k) \cos(\pi k)}{\sqrt{\sin^2(\pi k) + \frac{B^2}{4}}} \quad \text{et} \quad \theta_{1/2,B}^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{B}{4\sqrt{\sin^2(\pi k) + \frac{B^2}{4}}}.$$

Processus de Lévy stables

Soient $\alpha \in (1,2)$ et σ une mesure sur \mathbb{R}^* telle que $d\sigma(r) = |r|^{-\alpha-1} dr$.

Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^*} \min(1, r^2) d\sigma(r) < +\infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}^*} r^2 d\sigma(r) = +\infty.$$

Processus de Lévy stables

Soient $\alpha \in (1,2)$ et σ une mesure sur \mathbb{R}^* telle que $d\sigma(r) = |r|^{-\alpha-1} dr$.

Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^*} \min(1, r^2) d\sigma(r) < +\infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}^*} r^2 d\sigma(r) = +\infty.$$

$Y_u(\cdot)$ est un processus de Lévy partant de u de mesure σ ssi :

$$\mathbb{E} \left[\exp(\mathbf{i}\theta Y_u(t)) \right] = \exp(-|\theta|^\alpha + \mathbf{i}\theta u).$$

Processus de Lévy stables

Soient $\alpha \in (1,2)$ et σ une mesure sur \mathbb{R}^* telle que $d\sigma(r) = |r|^{-\alpha-1} dr$.

Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^*} \min(1, r^2) d\sigma(r) < +\infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}^*} r^2 d\sigma(r) = +\infty.$$

$Y_u(\cdot)$ est un processus de Lévy partant de u de mesure σ ssi :

$$\mathbb{E} \left[\exp(\mathbf{i}\theta Y_u(t)) \right] = \exp(-|\theta|^\alpha + \mathbf{i}\theta u).$$

On définit :

$$\rho(t, u) = \mathbb{E} \left[\rho_0(Y_u(t)) \right] \longrightarrow \rho(t, u) = \mathbb{E} \left[\rho_0(B_u(t)) \right].$$

Alors :

$$\partial_t \rho(t, u) = -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}[\rho](t, u) \longrightarrow \partial_t \rho(t, u) = \Delta[\rho](t, u).$$

Un processus de saut

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_B f]_i(t, u, k) &= \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{T}} \theta_{i,B}^2(k) R(k, k') \theta_{j,B}^2(k') (f_j(t, u, k') - f_i(t, u, k)) dk', \\ &= \lambda_B(k, i) \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{T}} P_B(k, i, dk', j) (f_j(t, u, k') - f_i(t, u, k)). \end{aligned}$$

Un processus de saut

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_B f]_i(t, u, k) &= \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{T}} \theta_{i,B}^2(k) R(k, k') \theta_{j,B}^2(k') (f_j(t, u, k') - f_i(t, u, k)) dk', \\ &= \lambda_B(k, i) \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{T}} P_B(k, i, dk', j) (f_j(t, u, k') - f_i(t, u, k)). \end{aligned}$$

On définit un processus de saut $(K(\cdot), I(\cdot))$

- $(K(0), I(0)) = (k, i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda_B(k, i)$.
- Le processus passe de (k, i) à (k', j) avec probabilité $P_B(k, i, dk', j)$.

Un processus de saut

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_B f]_i(t, u, k) &= \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{T}} \theta_{i,B}^2(k) R(k, k') \theta_{j,B}^2(k') (f_j(t, u, k') - f_i(t, u, k)) dk', \\ &= \lambda_B(k, i) \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{T}} P_B(k, i, dk', j) (f_j(t, u, k') - f_i(t, u, k)). \end{aligned}$$

On définit un processus de saut $(K(\cdot), I(\cdot))$

- $(K(0), I(0)) = (k, i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda_B(k, i)$.
- Le processus passe de (k, i) à (k', j) avec probabilité $P_B(k, i, dk', j)$.

$$Z_u(t) = u + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathbf{v}_B(K(s)) ds.$$

Un processus de saut

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_B f]_i(t, u, k) &= \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{T}} \theta_{i,B}^2(k) R(k, k') \theta_{j,B}^2(k') (f_j(t, u, k') - f_i(t, u, k)) dk', \\ &= \lambda_B(k, i) \sum_{j=1}^2 \int_{\mathbb{T}} P_B(k, i, dk', j) (f_j(t, u, k') - f_i(t, u, k)). \end{aligned}$$

On définit un processus de saut $(K(\cdot), I(\cdot))$

- $(K(0), I(0)) = (k, i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda_B(k, i)$.
- Le processus passe de (k, i) à (k', j) avec probabilité $P_B(k, i, dk', j)$.

$$Z_u(t) = u + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathbf{v}_B(K(s)) ds.$$

Alors :

$$f_i(t, u, k) = \mathbb{E}_{(k,i)} \left[f_{I(t)}^0(Z_u(t), K(t)) \right] \longrightarrow f(t, u) = \mathbb{E} \left[f_0(B_u(t)) \right].$$

Explication physique

Soit $(k, i) \in \mathbb{T} \times \{1, 2\}$.

- $\lambda_B(k, i)$ représente le temps d'attente dans l'état (k, i) .
- $\mathbf{v}_B(k)$ représente la vitesse dans l'état k .

Explication physique

Soit $(k, i) \in \mathbb{T} \times \{1, 2\}$.

- $\lambda_B(k, i)$ représente le temps d'attente dans l'état (k, i) .
- $\mathbf{v}_B(k)$ représente la vitesse dans l'état k .

Si $B > 0$

$$\mathbf{v}_B(k) \sim k \text{ et } \lambda_B(k, 1) \sim k^{-2} \text{ et } \lambda_B(k, 2) \sim k^{-4}.$$

Explication physique

Soit $(k, i) \in \mathbb{T} \times \{1, 2\}$.

- $\lambda_B(k, i)$ représente le temps d'attente dans l'état (k, i) .
- $\mathbf{v}_B(k)$ représente la vitesse dans l'état k .

Si $B > 0$

$$\mathbf{v}_B(k) \sim k \text{ et } \lambda_B(k, 1) \sim k^{-2} \text{ et } \lambda_B(k, 2) \sim k^{-4}.$$

Si $B = 0$

$$\mathbf{v}_0(k) \sim k \text{ et } \lambda_0(k, 1) \sim k^{-2} \text{ et } \lambda_B(k, 2) \sim k^{-2}.$$

Explication physique

Soit $(k, i) \in \mathbb{T} \times \{1, 2\}$.

- $\lambda_B(k, i)$ représente le temps d'attente dans l'état (k, i) .
- $\mathbf{v}_B(k)$ représente la vitesse dans l'état k .

Si $B > 0$

$$\mathbf{v}_B(k) \sim k \text{ et } \lambda_B(k, 1) \sim k^{-2} \text{ et } \lambda_B(k, 2) \sim k^{-4}.$$

Si $B = 0$

$$\mathbf{v}_0(k) \sim k \text{ et } \lambda_0(k, 1) \sim k^{-2} \text{ et } \lambda_B(k, 2) \sim k^{-2}.$$

$d_B(k, i)$: distance parcourue par la particule dans l'état (k, i) .

$$d_B(k, i) = \lambda_B(k, i) \mathbf{v}_B(k, i).$$

La distance parcourue change avec B .

Étude d'une marche aléatoire

$$Z_u(t) = u + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathbf{v}_B(K(s)) ds.$$

On note \mathcal{N}_t le nombre de saut jusqu'au temps t .

$$Z_u(t) = u + \sum_{n=0}^{\mathcal{N}_t} \lambda_B(K_n, I_n) \mathbf{v}_B(K_n).$$

Étude d'une marche aléatoire

$$Z_u(t) = u + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathbf{v}_B(K(s)) ds.$$

On note \mathcal{N}_t le nombre de saut jusqu'au temps t .

$$Z_u(t) = u + \sum_{n=0}^{\mathcal{N}_t} \lambda_B(K_n, I_n) \mathbf{v}_B(K_n).$$

On note π_B la mesure invariante de la chaîne $(K_n, I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Étude d'une marche aléatoire

$$Z_u(t) = u + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathbf{v}_B(K(s)) ds.$$

On note \mathcal{N}_t le nombre de saut jusqu'au temps t .

$$Z_u(t) = u + \sum_{n=0}^{\mathcal{N}_t} \lambda_B(K_n, I_n) \mathbf{v}_B(K_n).$$

On note π_B la mesure invariante de la chaîne $(K_n, I_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $r \neq 0$ alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{\alpha_B} \pi_B \left(\left\{ (k, i), \lambda_B(k, i) \mathbf{v}_B(k) > Nr \right\} \right) = \begin{cases} |r|^{-\frac{3}{2}} & \text{si } B = 0. \\ |r|^{-\frac{5}{3}} & \text{si } B \neq 0. \end{cases}$$

Avec :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \text{ si } B \neq 0 \text{ et } \alpha_B = \frac{3}{2} \text{ si } B = 0.$$

Limites hydrodynamiques

On définit $Y_u^B(\cdot)$ le processus de Lévy généré par $-(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Z_{Nu}(N^{\alpha_B t}) = u + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor N^{\alpha_B t} \rfloor} \lambda_B(K_n, I_n) \mathbf{v}_B(K_n) = Y_u(t)$$

Limites hydrodynamiques

On définit $Y_u^B(\cdot)$ le processus de Lévy généré par $-(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Z_{Nu}(N^{\alpha_B t}) = u + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor N^{\alpha_B t} \rfloor} \lambda_B(K_n, I_n) \mathbf{v}_B(K_n) = Y_u(t)$$

Soit ρ la solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ de :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(t, u) &= -(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}[\rho](t, u), \\ \rho(0, u) &= \rho^0(u). \end{aligned}$$

Échelle
macroscopique

Limites hydrodynamiques

On définit $Y_u^B(\cdot)$ le processus de Lévy généré par $-(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Z_{Nu}(N^{\alpha_B t}) = u + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor N^{\alpha_B t} \rfloor} \lambda_B(K_n, I_n) \mathbf{v}_B(K_n) = Y_u(t)$$

Soit ρ la solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ de :

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(t, u) &= -(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}[\rho](t, u), \\ \rho(0, u) &= \rho^0(u). \end{aligned}$$

Échelle
macroscopique

Alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} \left| f(N^{\alpha_B t}, Nu, k) - \rho_B(t, u) \right|^2 dk = 0.$$

- Résultat prouvé pour $B = 0$ par Jara, Komorowski et Olla en 2010.
- Résultat prouvé pour $B \neq 0$ par Saito, Sasada et Suda en 2018.

Un petit bilan historique

L'hypothèse initiale était :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_{x \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon x) \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}[e(0, x)] = \int_{\mathbb{R}} J(u) \mathcal{W}_0(u) du .$$

La question était : **Peut-on avoir une équation macroscopique pour le profil d'énergie ?**

Un petit bilan historique

L'hypothèse initiale était :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_{x \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon x) \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}[e(0, x)] = \int_{\mathbb{R}} J(u) \mathcal{W}_0(u) du .$$

La question était : **Peut-on avoir une équation macroscopique pour le profil d'énergie ?**

Oui et l'équation est :

$$\partial_t \mathcal{W}(t, u) = - (-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}} \mathcal{W}(t, u) . \quad \text{Échelle macroscopique}$$

Avec :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \text{ si } B \neq 0 \text{ et } \alpha_B = \frac{3}{2} \text{ si } B = 0 .$$

Un petit bilan historique

L'hypothèse initiale était :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_{x \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon x) \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}[e(0, x)] = \int_{\mathbb{R}} J(u) \mathcal{W}_0(u) du .$$

La question était : **Peut-on avoir une équation macroscopique pour le profil d'énergie ?**

Oui et l'équation est :

$$\partial_t \mathcal{W}(t, u) = - (-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}} \mathcal{W}(t, u) . \quad \text{Échelle macroscopique}$$

Avec :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \text{ si } B \neq 0 \text{ et } \alpha_B = \frac{3}{2} \text{ si } B = 0 .$$

- Limite en une étape prouvée pour **$B = 0$** par Jara, Komorowski et Olla en 2015 .

Un petit bilan historique

L'hypothèse initiale était :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \sum_{x \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon x) \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}[e(0, x)] = \int_{\mathbb{R}} J(u) \mathcal{W}_0(u) du .$$

La question était : **Peut-on avoir une équation macroscopique pour le profil d'énergie ?**

Oui et l'équation est :

$$\partial_t \mathcal{W}(t, u) = - (-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}} \mathcal{W}(t, u) . \quad \text{Échelle macroscopique}$$

Avec :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \text{ si } B \neq 0 \text{ et } \alpha_B = \frac{3}{2} \text{ si } B = 0 .$$

- Limite en une étape prouvée pour $B = 0$ par Jara, Komorowski et Olla en 2015 .

Que se passe t'il si on remplace B par $B_N = BN^{-\delta}$?

Un processus d'interpolation

Soit $B_N = BN^{-\delta}$ avec $\delta > 0$. On travaille avec le tableau (K_n^N, I_n^N) .

Un processus d'interpolation

Soit $B_N = BN^{-\delta}$ avec $\delta > 0$. On travaille avec le tableau (K_n^N, I_n^N) .

On définit une mesure ν_δ sur \mathbb{R}^* par :

$$d\nu_\delta(r) = \begin{cases} |r|^{-\frac{3}{2}} dr & \text{si } \delta > \frac{1}{2} \\ h_B(r) dr & \text{si } \delta = \frac{1}{2} \\ |r|^{-\frac{5}{3}} dr & \text{si } \delta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Un processus d'interpolation

Soit $B_N = BN^{-\delta}$ avec $\delta > 0$. On travaille avec le tableau (K_n^N, I_n^N) .

On définit une mesure ν_δ sur \mathbb{R}^* par :

$$d\nu_\delta(r) \begin{cases} |r|^{-\frac{3}{2}} dr & \text{si } \delta > \frac{1}{2} \\ h_B(r) dr & \text{si } \delta = \frac{1}{2} \\ |r|^{-\frac{5}{3}} dr & \text{si } \delta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

On note $Y_u^\delta(\cdot)$ le processus de Lévy de mesure ν_δ .

Un processus d'interpolation

Soit $B_N = BN^{-\delta}$ avec $\delta > 0$. On travaille avec le tableau (K_n^N, I_n^N) .

On définit une mesure ν_δ sur \mathbb{R}^* par :

$$d\nu_\delta(r) \begin{cases} |r|^{-\frac{3}{2}} dr & \text{si } \delta > \frac{1}{2} \\ h_B(r) dr & \text{si } \delta = \frac{1}{2} \\ |r|^{-\frac{5}{3}} dr & \text{si } \delta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

On note $Y_u^\delta(\cdot)$ le processus de Lévy de mesure ν_δ . Soit $r \neq 0$ alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{\alpha_\delta} \pi_{B_N} \left(\left\{ (k, i), \lambda_{B_N}(k, i) \mathbf{v}_{B_N}(k) > Nr \right\} \right) = \nu_\delta(r).$$

Avec :

$$\alpha_\delta = \frac{5 - \delta}{3} \quad \text{si } \delta < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_\delta = \frac{3}{2} \quad \text{si } \delta \geq \frac{1}{2}.$$

Un processus d'interpolation

Soit $B_N = BN^{-\delta}$ avec $\delta > 0$. On travaille avec le tableau (K_n^N, I_n^N) .

On définit une mesure ν_δ sur \mathbb{R}^* par :

$$d\nu_\delta(r) \begin{cases} |r|^{-\frac{3}{2}} dr & \text{si } \delta > \frac{1}{2} \\ h_B(r) dr & \text{si } \delta = \frac{1}{2} \\ |r|^{-\frac{5}{3}} dr & \text{si } \delta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

On note $Y_u^\delta(\cdot)$ le processus de Lévy de mesure ν_δ . Soit $r \neq 0$ alors :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{\alpha_\delta} \pi_{B_N} \left(\left\{ (k, i), \lambda_{B_N}(k, i) \mathbf{v}_{B_N}(k) > Nr \right\} \right) = \nu_\delta(r).$$

Avec :

$$\alpha_\delta = \frac{5 - \delta}{3} \quad \text{si } \delta < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_\delta = \frac{3}{2} \quad \text{si } \delta \geq \frac{1}{2}.$$

Théorème [Cane 22'] : $N^{-1} Z_u^N(N^{\alpha_B \cdot})$ converge vers $Y_u^\delta(\cdot)$.



Une EDP d'interpolation

Une EDP d'interpolation

Le générateur infinitésimal de $Y_u^\delta(\cdot)$ est donné par :

$$\mathcal{D}_\delta[\phi](u) = \begin{cases} -(-\Delta)^{\frac{3}{4}}[\phi](u) & \text{si } \delta > \frac{1}{2} \\ \mathcal{D}_B[\phi] & \text{si } \delta = \frac{1}{2} \\ -(-\Delta)^{\frac{5}{6}}[\phi](u) & \text{si } \delta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Une EDP d'interpolation

Le générateur infinitésimal de $Y_u^\delta(\cdot)$ est donné par :

$$\mathcal{D}_\delta[\phi](u) \begin{cases} -(-\Delta)^{\frac{3}{4}}[\phi](u) \text{ si } \delta > \frac{1}{2} \\ \mathcal{D}_B[\phi] \text{ si } \delta = \frac{1}{2} \\ -(-\Delta)^{\frac{5}{6}}[\phi](u) \text{ si } \delta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit ρ_δ la solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ de :

$$\partial_t \rho_\delta(t, u) = \mathcal{D}_\delta[\rho_\delta](t, u),$$

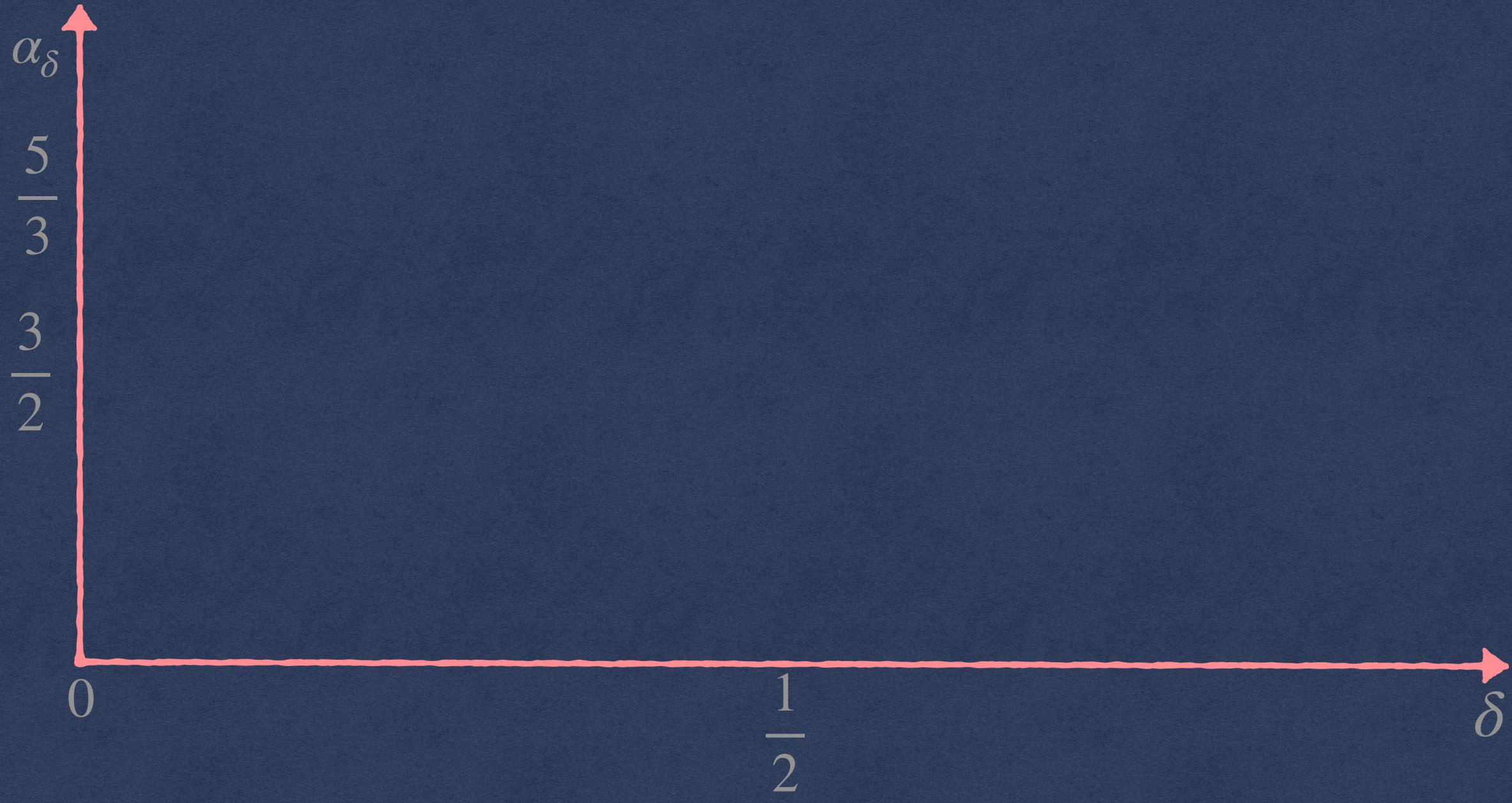
$$\rho_\delta(0, u) = \rho^0(u).$$

Théorème [Cane, 22'] : $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} \left| f^N(N^{\alpha_\delta} t, Nu, k) - \rho_\delta(t, u) \right|^2 dk = 0.$

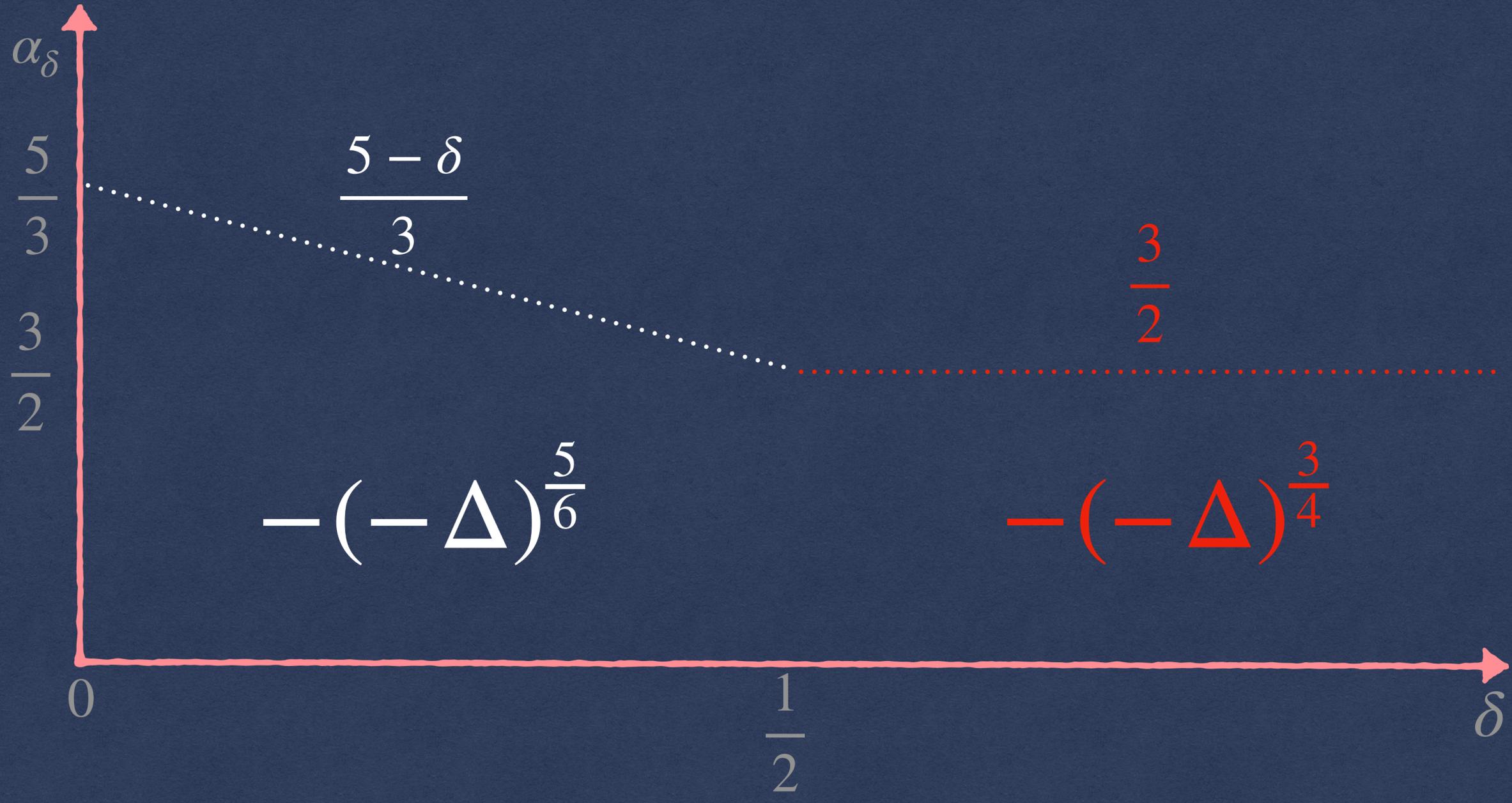


Épilogue

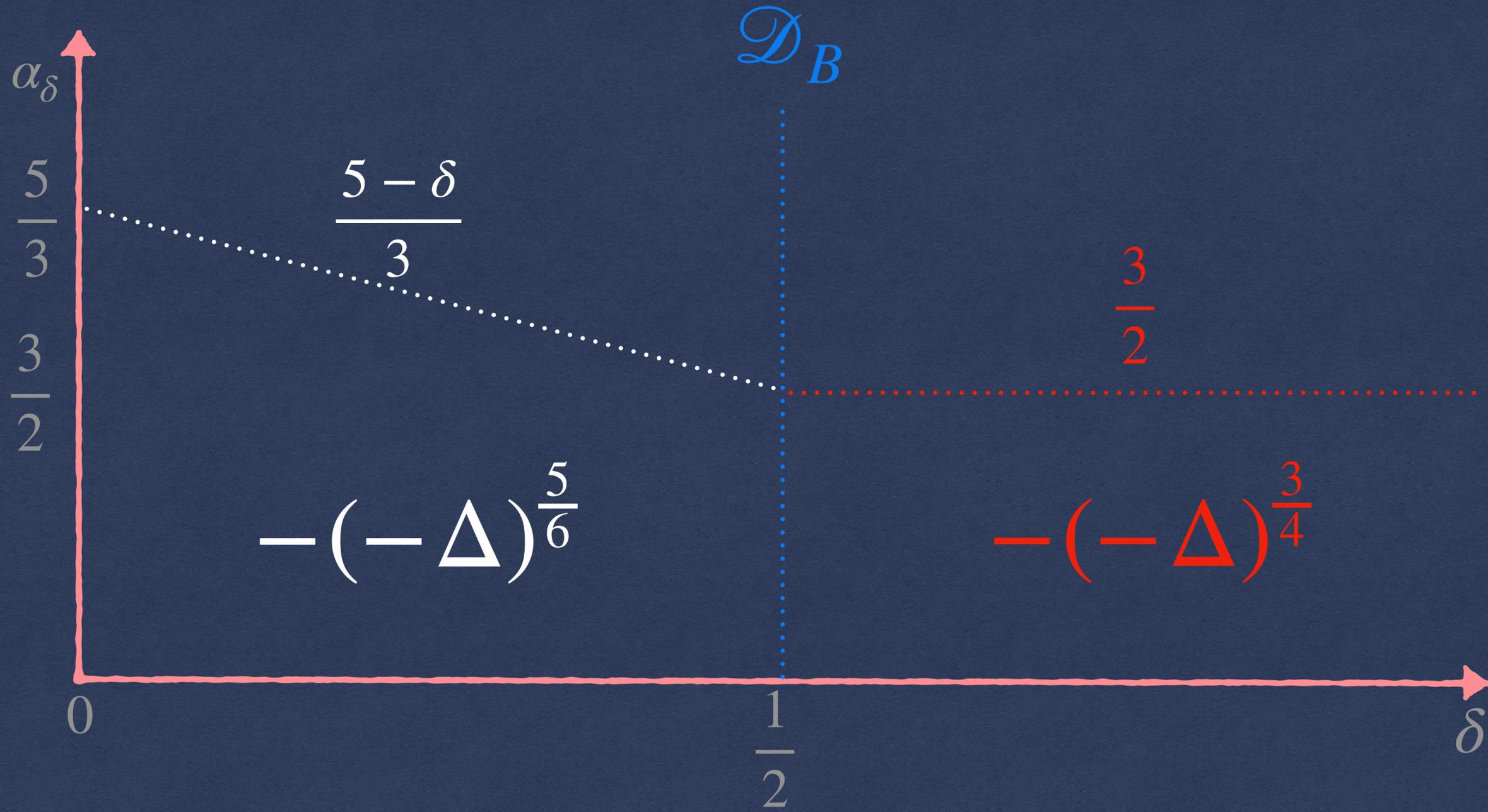
Épilogue



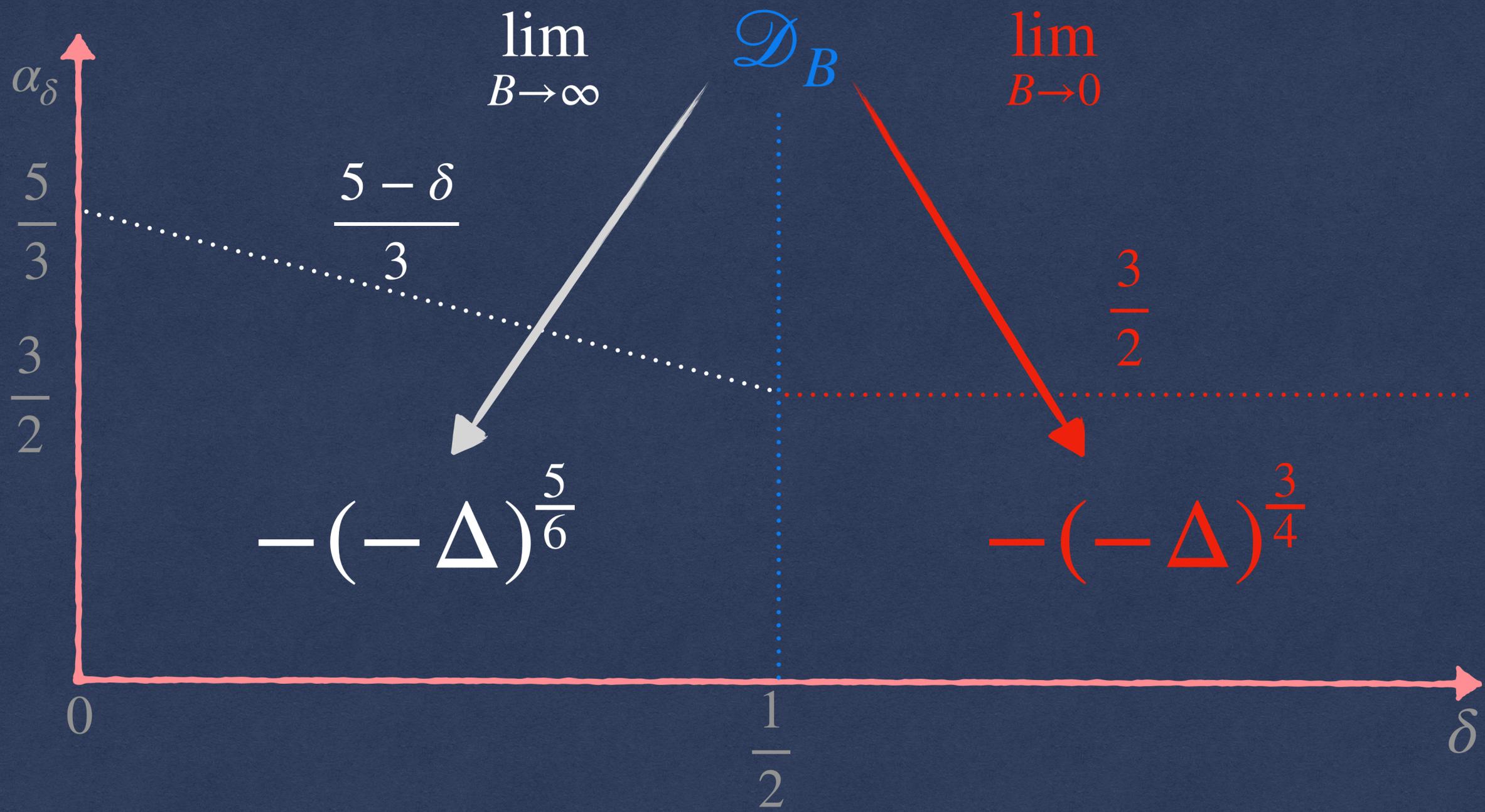
Épilogue



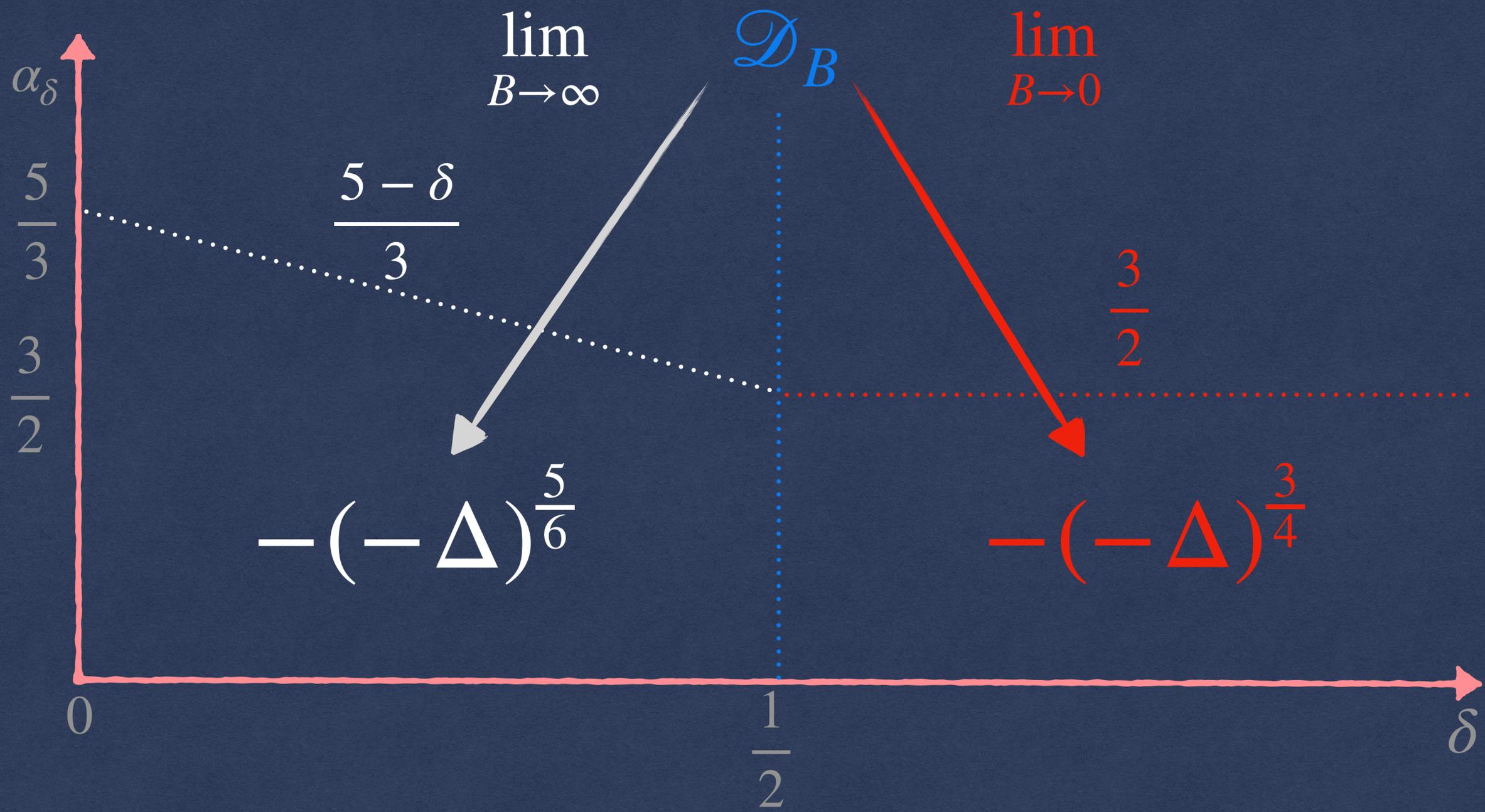
Épilogue



Épilogue



Épilogue



Projet en cours : Étudier la transition en une seule étape.