Transition dans la superdiffusion d'énergie d'une chaîne d'oscillateurs harmoniques bruitée soumise à un champ magnétique

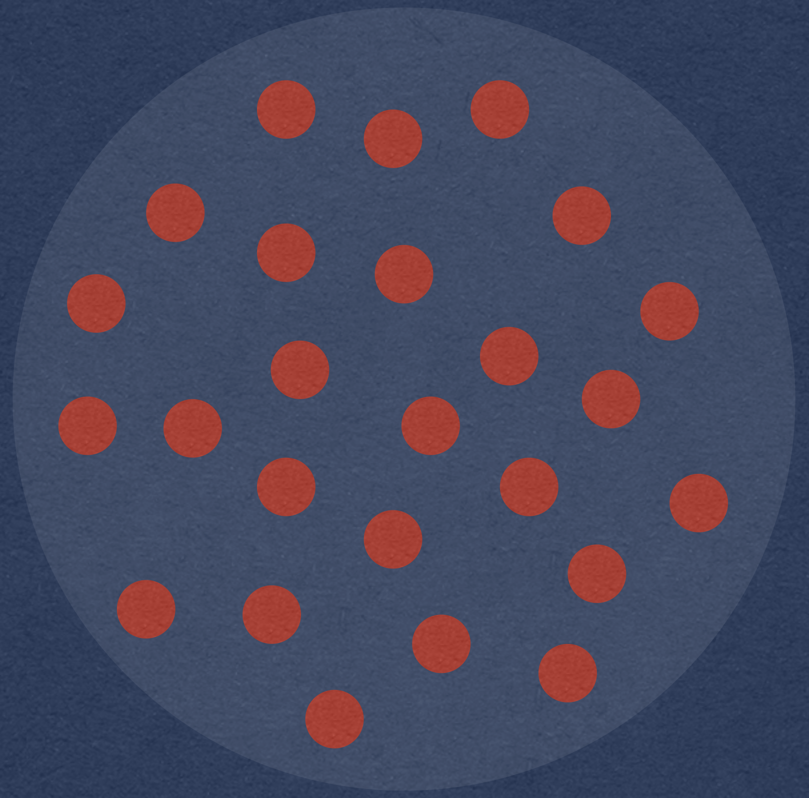
Cane Gaëtan
LJAD, UCA

Dijon
19 Janvier 2022

Motivations

1953 : Première expérience numérique par Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou.

→ Comprendre la diffusion d'énergie dans les chaînes d'oscillateurs anharmoniques.

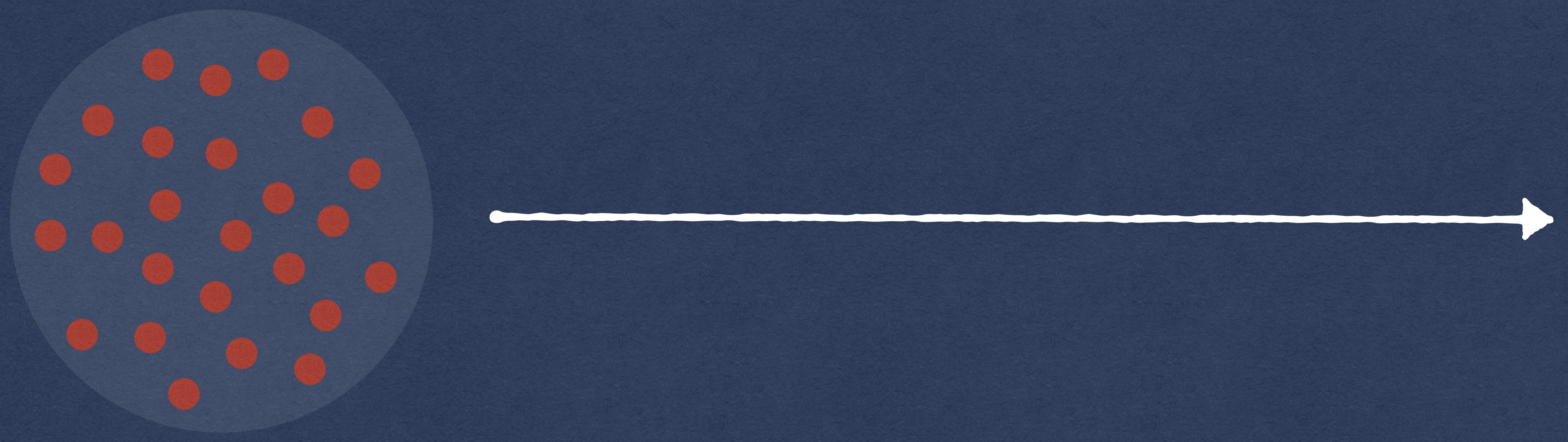


Échelle microscopique → Propriétés macroscopiques

Motivations

1953 : Première expérience numérique par Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou.

→ Comprendre la diffusion d'énergie dans les chaînes d'oscillateurs anharmoniques.



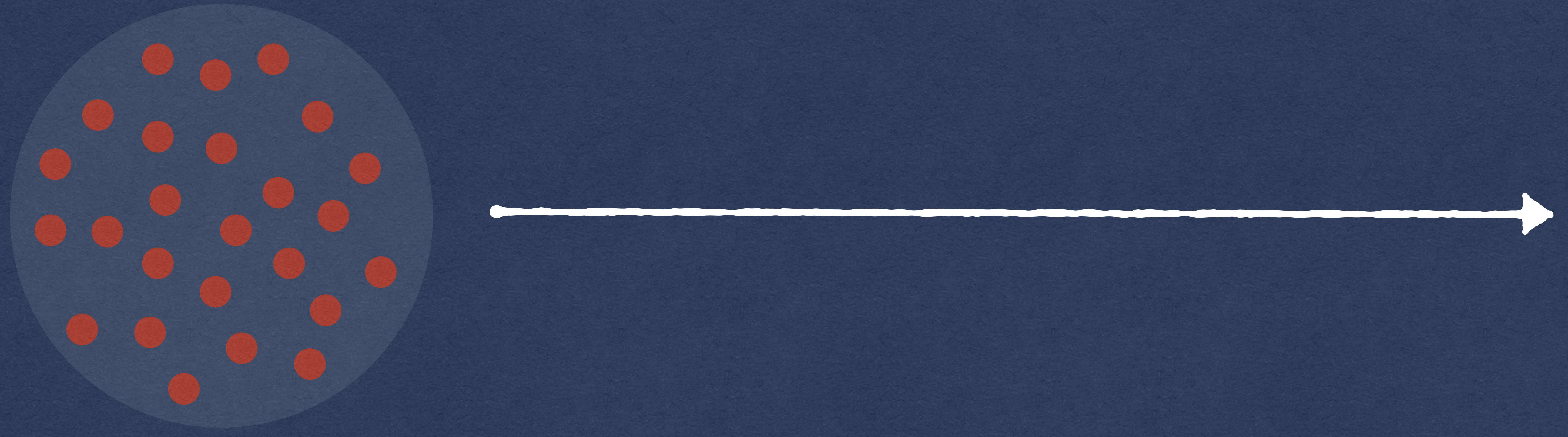
2014 : Théorie formelle de Spohn

- Système avec de nombreuses quantités conservées (énergie, moment,...) et interactions locales.
- Classes d'universalités (diffusion, diffusion fractionnaire...)

Motivations

1953 : Première expérience numérique par Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou.

→ Comprendre la diffusion d'énergie dans les chaînes d'oscillateurs anharmoniques.



2014 : Théorie formelle de Spohn

- Système avec de nombreuses quantités conservées (énergie, moment,...) et interactions locales.
- Classes d'universalités (diffusion, diffusion fractionnaire...)

Peu de résultats théoriques : Jara, Komorowski et Olla en 2015.

Les changements d'échelles

Échelle microscopique

Le système de particules est régi par les lois de Newton

Les changements d'échelles

Échelle microscopique

Le système de particules est régi par les lois de Newton

Limite cinétique →

Échelle mésoscopique

Équation de Boltzmann

$$\partial_t f + v\,\nabla f = Q[f]$$

Les changements d'échelles

Échelle microscopique

Le système de particules est régi par les lois de Newton

Limite cinétique

Échelle mésoscopique

Équation de Boltzmann

$$\partial_t f + v\,\nabla f = Q[f]$$

Limite hydrodynamique

Échelle macroscopique

Équation de la chaleur

$$\partial_t \rho = \Delta[\rho]$$

Les changements d'échelles

Échelle microscopique

Le système de particules est régi par les lois de Newton

Limite cinétique

Échelle mésoscopique

Équation de Boltzmann

$$\partial_t f + v \nabla f = Q[f]$$

Limite hydrodynamique

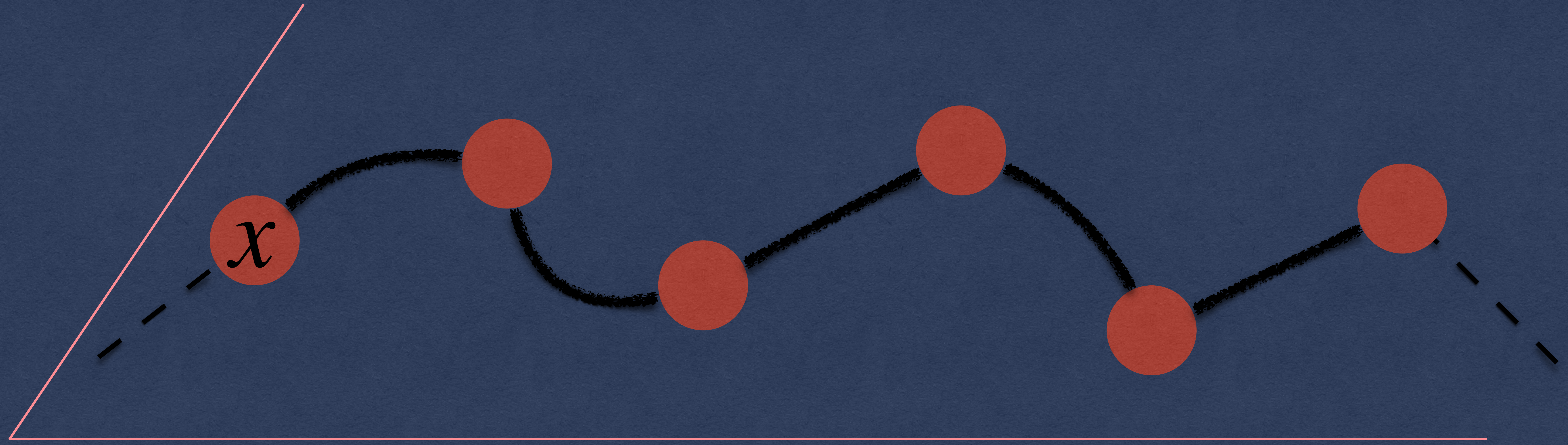
Limite hydrodynamique

Échelle macroscopique

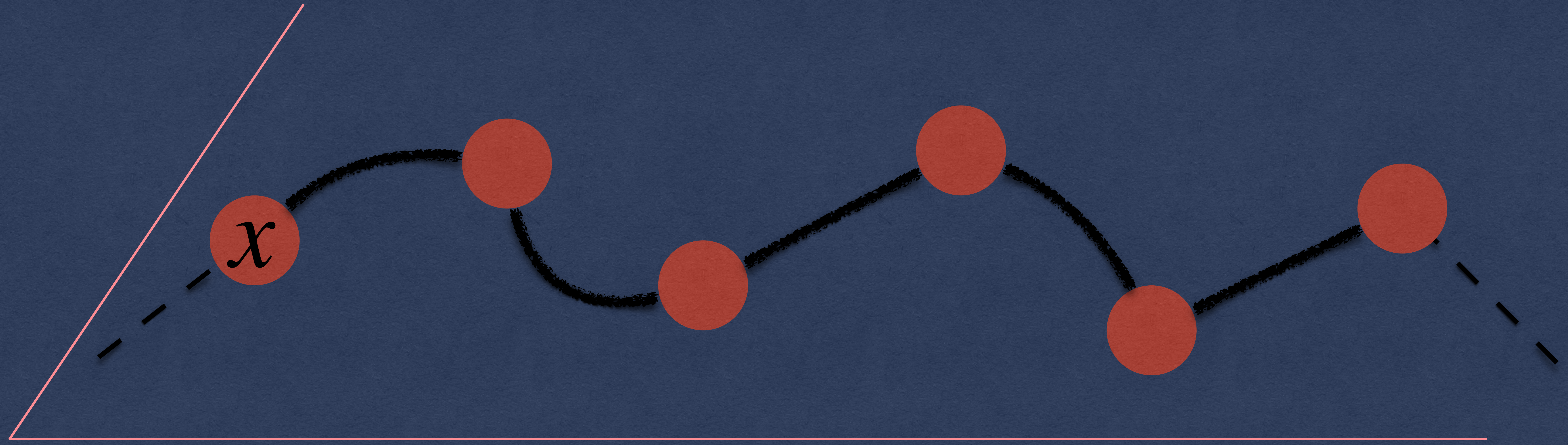
Équation de la chaleur

$$\partial_t \rho = \Delta[\rho]$$

Présentation de la chaîne harmonique dans $\mathbb{R}^2$



Présentation de la chaîne harmonique dans $\mathbb{R}^2$

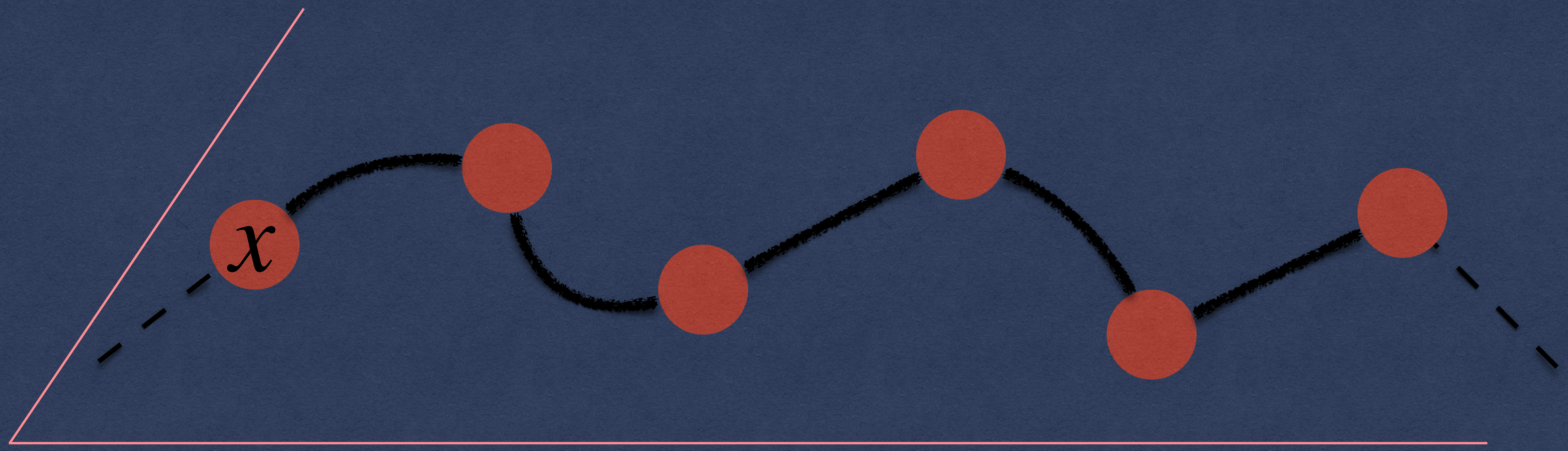


$$\frac{d}{dt}q_i(t,x) = p_i(t,x)$$

$$\frac{d}{dt}p_i(t,x) = q_i(t,x+1) + q_i(t,x-1) - 2q_i(t,x)$$

Échelle microscopique

Présentation de la chaîne harmonique dans $\mathbb{R}^2$



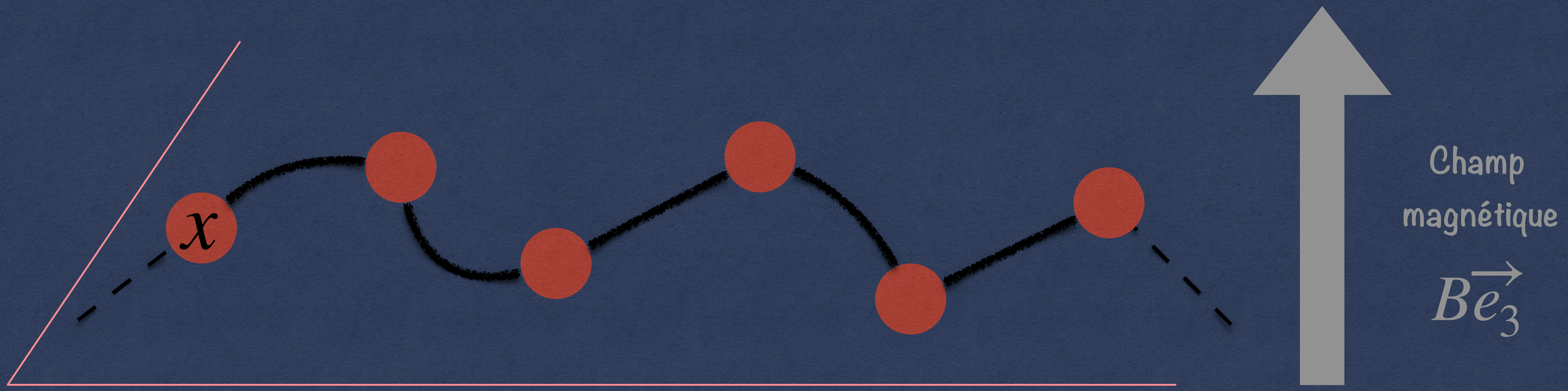
$$\frac{d}{dt}q_i(t,x) = p_i(t,x)$$

Échelle microscopique

$$\frac{d}{dt}p_i(t,x) = q_i(t,x+1) + q_i(t,x-1) - 2q_i(t,x)$$

$+\varepsilon$ bruit.

Présentation de la chaîne harmonique dans $\mathbb{R}^2$



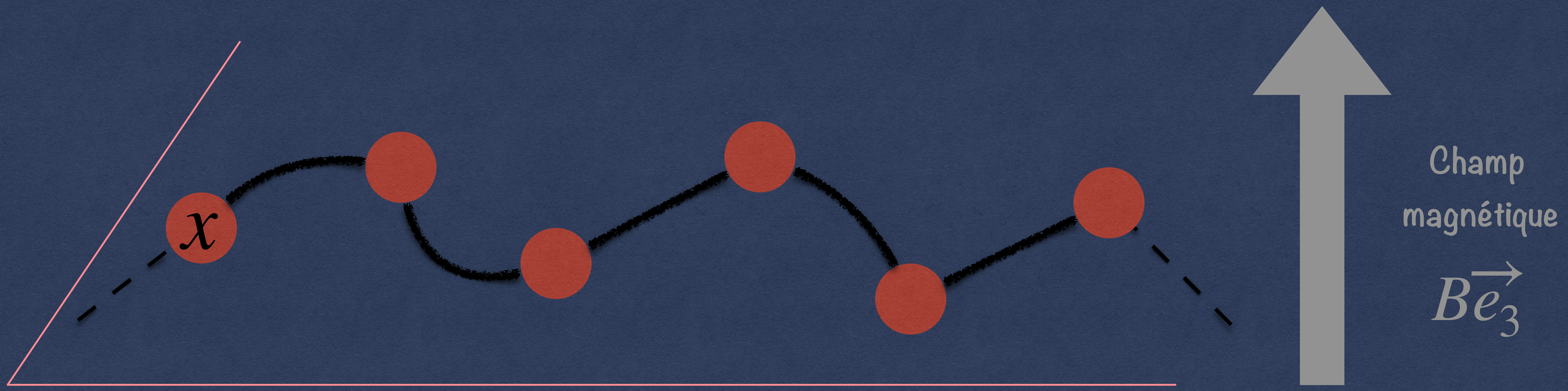
$$\frac{d}{dt}q_i(t,x) = p_i(t,x)$$

Échelle
microscopique

$$\frac{d}{dt}p_i(t,x) = q_i(t,x+1) + q_i(t,x-1) - 2q_i(t,x)$$

$+\varepsilon$ bruit.

Présentation de la chaîne harmonique dans $\mathbb{R}^2$



$$\frac{d}{dt}q_i(t,x) = p_i(t,x)$$

Échelle
microscopique

$$\frac{d}{dt}p_i(t,x) = q_i(t,x+1) + q_i(t,x-1) - 2q_i(t,x) + B(\delta_{i,1}p_2(t,x) - \delta_{i,2}p_1(t,x)) + \varepsilon \text{ bruit.}$$

Objectif de l'étude

La dynamique préserve l'énergie et le moment.

$$E(t) = \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} \left|p(t,x)\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} \left|q(t,x+1) - q(t,x-1)\right|^2 = \sum_{x\in\mathbb{Z}} e(t,x)\,.$$

$$P(t) = \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} \big(p_1(t,x) - Bq_2(t,x)\big), \sum_{x\in\mathbb{Z}} \big(p_2(t,x) + Bq_1(t,x)\big) \right).$$

Objectif de l'étude

La dynamique préserve l'énergie et le moment.

$$E(t) = \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} \left|p(t,x)\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} \left|q(t,x+1) - q(t,x-1)\right|^2 = \sum_{x\in\mathbb{Z}} e(t,x)\,.$$

$$P(t) = \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} \big(p_1(t,x) - Bq_2(t,x)\big), \sum_{x\in\mathbb{Z}} \big(p_2(t,x) + Bq_1(t,x)\big) \right).$$

On note μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Objectif de l'étude

La dynamique préserve l'énergie et le moment.

$$E(t) = \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} \left|p(t,x)\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} \left|q(t,x+1) - q(t,x-1)\right|^2 = \sum_{x\in\mathbb{Z}} e(t,x)\,.$$

$$P(t) = \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} \big(p_1(t,x) - Bq_2(t,x)\big), \sum_{x\in\mathbb{Z}} \big(p_2(t,x) + Bq_1(t,x)\big) \right).$$

On note μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Hypothèse naturelle sur le système :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{x\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon x)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}[e(0,x)] = \int_{\mathbb{R}} J(u)\mathscr{W}_0(u)du\,.$$

Échelle macroscopique

Objectif de l'étude

La dynamique préserve l'énergie et le moment.

$$E(t) = \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} \left|p(t,x)\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} \left|q(t,x+1) - q(t,x-1)\right|^2 = \sum_{x\in\mathbb{Z}} e(t,x)\,.$$

$$P(t) = \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}} \big(p_1(t,x) - Bq_2(t,x)\big), \sum_{x\in\mathbb{Z}} \big(p_2(t,x) + Bq_1(t,x)\big) \right).$$

On note μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Hypothèse naturelle sur le système :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{x\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon x)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}[e(0,x)] = \int_{\mathbb{R}} J(u)\mathscr{W}_0(u)du\,.$$

Échelle macroscopique

Peut-on avoir une équation macroscopique pour le profil d'énergie ?

Distribution de Wigner

$$\forall (t,k) \in [0,T] \times \mathbb{T},\quad \widehat{\psi}_1(t,k) = \theta_{1,B}(k)\left[\widehat{p}_1(t,k) - \mathbf{i}\omega_2(k)\widehat{q}_1(t,k) + \mathbf{i}\widehat{p}_2(t,k) + \omega_2(k)\widehat{q}_2(t,k)\right].$$

$$\widehat{\psi}_2(t,k) = \theta_{2,B}(k)\left[\widehat{p}_1(t,k) - \mathbf{i}\omega_1(k)\widehat{q}_1(t,k) - \mathbf{i}\widehat{p}_2(t,k) - \omega_1(k)\widehat{q}_2(t,k)\right].$$

$$\longrightarrow \|\widehat{\psi}_1(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \|\widehat{\psi}_2(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = E(t).$$

Distribution de Wigner

$$\forall (t,k) \in [0,T] \times \mathbb{T}, \quad \widehat{\psi}_1(t,k) = \theta_{1,B}(k)\left[\widehat{p}_1(t,k) - \mathbf{i}\omega_2(k)\widehat{q}_1(t,k) + \mathbf{i}\widehat{p}_2(t,k) + \omega_2(k)\widehat{q}_2(t,k)\right].$$

$$\widehat{\psi}_2(t,k) = \theta_{2,B}(k)\left[\widehat{p}_1(t,k) - \mathbf{i}\omega_1(k)\widehat{q}_1(t,k) - \mathbf{i}\widehat{p}_2(t,k) - \omega_1(k)\widehat{q}_2(t,k)\right].$$

$$\longrightarrow \|\widehat{\psi}_1(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \|\widehat{\psi}_2(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = E(t).$$

On définit $\mathscr{W}^\varepsilon : [0,T] \to (S \times S)'$ pour tout $J = (J_1, J_2)$ par :

$$\langle \mathscr{W}^\varepsilon(t), J\rangle = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}}\sum_{y\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{T}} dk\, \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[\psi_i\left(t\varepsilon^{-1},x\right)\psi_i\left(t\varepsilon^{-1},y\right)\right]\exp\left(-2\mathbf{i}\pi k[y-x]\right) J_i\left(\frac{\varepsilon(x+y)}{2},k\right).$$

Distribution de Wigner

$$\forall (t,k) \in [0,T] \times \mathbb{T},\quad \widehat{\psi}_1(t,k) = \theta_{1,B}(k)\left[\widehat{p}_1(t,k) - \mathbf{i}\omega_2(k)\widehat{q}_1(t,k) + \mathbf{i}\widehat{p}_2(t,k) + \omega_2(k)\widehat{q}_2(t,k)\right].$$

$$\widehat{\psi}_2(t,k) = \theta_{2,B}(k)\left[\widehat{p}_1(t,k) - \mathbf{i}\omega_1(k)\widehat{q}_1(t,k) - \mathbf{i}\widehat{p}_2(t,k) - \omega_1(k)\widehat{q}_2(t,k)\right].$$

$$\longrightarrow \|\widehat{\psi}_1(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} + \|\widehat{\psi}_2(t)\|^2_{\mathbb{L}^2(\mathbb{T})} = E(t).$$

On définit $\mathscr{W}^\varepsilon : [0,T] \to (S \times S)'$ pour tout $J = (J_1, J_2)$ par :

$$\langle \mathscr{W}^\varepsilon(t), J\rangle = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}}\sum_{y\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{T}} dk\, \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[\psi_i\left(t\varepsilon^{-1},x\right)\psi_i\left(t\varepsilon^{-1},y\right)\right]\exp\left(-2\mathbf{i}\pi k[y-x]\right) J_i\left(\frac{\varepsilon(x+y)}{2},k\right).$$

Soit $J = \left(J_1, J_1\right)$ un couple de fonction indépendantes de k alors :

$$\langle \mathscr{W}^\varepsilon(t), J\rangle = \varepsilon\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[e\left(t\varepsilon^{-1},x\right)\right] J_1(\varepsilon x) + \mathcal{O}_J(\varepsilon).$$

Pour comprendre le comportement macroscopique de l'énergie, nous devons étudier celui de $\mathscr{W}^\varepsilon$.

Équation de Boltzmann linéaire

$\mathscr{W}^{\varepsilon}$ converge vers $f = (f_1, f_2)$ où :

$$\partial_t f_i(t,u,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_u f_i(t,u,k) = [\mathscr{L}_B f]_i(t,u,k)\,.$$

Échelle mésoscopique

- Résultat prouvé pour $B = 0$ par Basile, Komorowski et Olla en 2009.
- Résultat prouvé pour $B \neq 0$ par Saito, Sasada et Suda en 2018.

Équation de Boltzmann linéaire

$\mathscr{W}^\varepsilon$ converge vers $f = (f_1, f_2)$ où :

$$\partial_t f_i(t,u,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_u f_i(t,u,k) = [\mathscr{L}_B f]_i(t,u,k)\,.$$

Échelle mésoscopique

- Résultat prouvé pour $B = 0$ par Basile, Komorowski et Olla en 2009.
- Résultat prouvé pour $B \neq 0$ par Saito, Sasada et Suda en 2018.

$$[\mathscr{L}_B f]_i(t,u,k) = \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{T}} \theta^2_{i,B}(k)R(k,k')\theta^2_{j,B}(k')\,(f_j(t,u,k') - f_i(t,u,k))dk'\,.$$

$$\mathbf{v}_B(k) = \frac{\sin(\pi k)\cos(\pi k)}{\sqrt{\sin^2(\pi k) + \frac{B^2}{4}}}$$ et $$\theta^2_{1/2,B} = \frac{1}{2} \pm \frac{B}{4\sqrt{\sin^2(\pi k) + \frac{B^2}{4}}}\,.$$

Processus de Lévy stables

Soient $\alpha \in (1,2)$ et σ une mesure sur $\mathbb{R}^*$ telle que $d\sigma(r) = |r|^{-\alpha-1}dr$.

Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^*} \min(1,r^2)d\sigma(r) < +\infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}^*} r^2 d\sigma(r) = +\infty\,.$$

Processus de Lévy stables

Soient $\alpha \in (1,2)$ et σ une mesure sur $\mathbb{R}^*$ telle que $d\sigma(r) = |r|^{-\alpha-1}dr$.

Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^*} \min(1,r^2)d\sigma(r) < +\infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}^*} r^2 d\sigma(r) = +\infty\,.$$

$Y_u(\cdot)$ est un processus de Lévy partant de u de mesure σ ssi :

$$\mathbb{E}\left[\, exp\left(\mathbf{i}\theta Y_u(t)\right)\right] = \exp\left(-|\theta|^\alpha + \mathbf{i}\theta u\right).$$

Processus de Lévy stables

Soient $\alpha \in (1,2)$ et σ une mesure sur $\mathbb{R}^*$ telle que $d\sigma(r) = |r|^{-\alpha-1}dr$.

Alors :

$$\int_{\mathbb{R}^*} \min(1,r^2)d\sigma(r) < +\infty \text{ et } \int_{\mathbb{R}^*} r^2 d\sigma(r) = +\infty\,.$$

$Y_u(\cdot)$ est un processus de Lévy partant de u de mesure σ ssi :

$$\mathbb{E}\left[\, exp\left(\mathbf{i}\theta Y_u(t)\right)\right] = \exp\left(-|\theta|^\alpha + \mathbf{i}\theta u\right).$$

On définit :

$$\rho(t,u) = \mathbb{E}\left[\rho_0\left(Y_u(t)\right)\right] \longrightarrow \rho(t,u) = \mathbb{E}\left[\rho_0\left(\mathscr{B}_u(t)\right)\right].$$

Alors :

$$\partial_t\rho(t,u) = -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}[\rho](t,u) \longrightarrow \partial_t\rho(t,u) = \Delta[\rho](t,u)\,.$$

Un processus de saut

$$
\begin{aligned}
[\mathscr{L}_B f]_i(t,u,k) &= \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \theta_{i,B}^2(k) R(k,k') \theta_{j,B}^2(k') \left(f_j(t,u,k') - f_i(t,u,k)\right) dk', \\
&= \lambda_B(k,i) \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j) \left(f_j(t,u,k') - f_i(t,u,k)\right).
\end{aligned}
$$

Un processus de saut

$$[\mathscr{L}_B f]_i(t,u,k) = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \theta_{i,B}^2(k) R(k,k') \theta_{j,B}^2(k') \left(f_j(t,u,k') - f_i(t,u,k) \right) dk',$$
$$= \lambda_B(k,i) \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j) \left(f_j(t,u,k') - f_i(t,u,k) \right).$$

On définit un processus de saut $\big(K(\,\cdot\,), I(\,\cdot\,)\big)$

- $\big(K(0), I(0)\big) = (k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda_B(k,i)$.
- Le processus passe de (k,i) à (k',j) avec probabilité $P_B(k,i,dk',j)$.

Un processus de saut

$$[\mathscr{L}_B f]_i(t,u,k) = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \theta_{i,B}^2(k) R(k,k') \theta_{j,B}^2(k') \left(f_j(t,u,k') - f_i(t,u,k)\right) dk',$$

$$= \lambda_B(k,i) \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j) \left(f_j(t,u,k') - f_i(t,u,k)\right).$$

On définit un processus de saut $\left(K(\,\cdot\,), I(\,\cdot\,)\right)$

- $\left(K(0), I(0)\right) = (k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda_B(k,i)$.
- Le processus passe de (k,i) à (k',j) avec probabilité $P_B(k,i,dk',j)$.

$$Z_u(t) = u + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathbf{v}_B\left(K(s)\right) ds.$$

Un processus de saut

$$[\mathscr{L}_B f]_i(t,u,k) = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \theta^2_{i,B}(k) R(k,k') \theta^2_{j,B}(k') \left(f_j(t,u,k') - f_i(t,u,k)\right) dk',$$
$$= \lambda_B(k,i) \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j) \left(f_j(t,u,k') - f_i(t,u,k)\right).$$

On définit un processus de saut $\big(K(\cdot), I(\cdot)\big)$

- $\big(K(0), I(0)\big) = (k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda_B(k,i)$.
- Le processus passe de (k,i) à (k',j) avec probabilité $P_B(k,i,dk',j)$.

$$Z_u(t) = u + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathbf{v}_B\big(K(s)\big)\, ds.$$

Alors :

$$f_i(t,u,k) = \mathbb{E}_{(k,i)}\left[f^0_{I(t)}\big(Z_u(t), K(t)\big)\right] \longrightarrow f(t,u) = \mathbb{E}\left[f_0\big(\mathscr{B}_u(t)\big)\right].$$

Étude d'une marche aléatoire

$$Z_u(t) = u + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathbf{v}_B \left(K(s)\right) ds\,.$$

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t.

$$Z_u(t) = u + \sum_{n=0}^{\mathcal{N}_t} \lambda_B \left(K_n, I_n\right) \mathbf{v}_B \left(K_n\right).$$

Étude d'une marche aléatoire

$$Z_u(t) = u + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathbf{v}_B \left(K(s) \right) ds \, .$$

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t.

$$Z_u(t) = u + \sum_{n=0}^{\mathcal{N}_t} \lambda_B \left(K_n, I_n \right) \mathbf{v}_B \left(K_n \right) .$$

On note π_B la mesure invariante de la chaîne $\left(K_n, I_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Étude d'une marche aléatoire

$$Z_u(t) = u + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathbf{v}_B\left(K(s)\right) ds\,.$$

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t.

$$Z_u(t) = u + \sum_{n=0}^{\mathcal{N}_t} \lambda_B\left(K_n, I_n\right) \mathbf{v}_B\left(K_n\right).$$

On note π_B la mesure invariante de la chaîne $\left(K_n, I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $r > 0$ alors :

$$\lim_{N\to\infty} N^{\alpha_B}\pi_B\left(\left\{(k,i), \lambda_B(k,i)\mathbf{v}_B(k) > Nr\right\}\right) = \begin{cases} |r|^{-\frac{3}{2}} \text{ si } B = 0. \\ |r|^{-\frac{5}{3}} \text{ si } B \neq 0. \end{cases}$$

Avec :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \text{ si } B \neq 0 \text{ et } \alpha_B = \frac{3}{2} \text{ si } B = 0.$$

Limites hydrodynamiques

On définit $Y_u^B(\,\cdot\,)$ le processus de Lévy généré par $-(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}$

Les lois finis-dimensionnelles de $N^{-1}Z_u(N^{\alpha_B}\cdot)$ convergent faiblement vers $Y_u^B(\,\cdot\,)$.

Limites hydrodynamiques

On définit $Y_u^B(\cdot)$ le processus de Lévy généré par $-(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}$

Les lois finis-dimensionnelles de $N^{-1}Z_u(N^{\alpha_B}\cdot)$ convergent faiblement vers $Y_u^B(\cdot)$.

Soit ρ la solution sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ de :

$$\begin{aligned}\partial_t\rho(t,u) &= -\,(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}[\rho](t,u),\\ \rho(0,u) &= \rho^0(u)\,.\end{aligned}$$

Échelle macroscopique

Limites hydrodynamiques

On définit $Y_u^B(\,\cdot\,)$ le processus de Lévy généré par $-(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}$

Les lois finis-dimensionnelles de $N^{-1}Z_u(N^{\alpha_B}\cdot)$ convergent faiblement vers $Y_u^B(\,\cdot\,)$.

Soit ρ la solution sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ de :

$$\partial_t\rho(t,u) = -\,(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}[\rho](t,u),$$
$$\rho(0,u) = \rho^0(u)\,.$$

Échelle macroscopique

Alors :

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{T}}\left|f\left(N^{\alpha_B}t, Nu, k\right) - \rho_B(t,u)\right|^2 dk = 0.$$

- Résultat prouvé pour $B=0$ par Jara, Komorowski et Olla en 2010.
- Résultat prouvé pour $B\neq 0$ par Saito, Sasada et Suda en 2018.

Un petit bilan historique

L'hypothèse initiale était :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{x\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon x)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}[e(0,x)] = \int_{\mathbb{R}} J(u)\mathscr{W}_0(u)du\,.$$

La question était : **Peut-on avoir une équation macroscopique pour le profil d'énergie ?**

Un petit bilan historique

L'hypothèse initiale était :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{x\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon x)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}[e(0,x)] = \int_{\mathbb{R}} J(u)\mathscr{W}_0(u)du\,.$$

La question était : **Peut-on avoir une équation macroscopique pour le profil d'énergie ?**

Oui et l'équation est :

$$\partial_t \mathscr{W}(t,u) = -(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}[\mathscr{W}](t,u)\,.$$

Échelle macroscopique

Avec :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \text{ si } B \neq 0 \text{ et } \alpha_B = \frac{3}{2} \text{ si } B = 0.$$

Un petit bilan historique

L'hypothèse initiale était :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum_{x \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon x) \mathbb{E}_{\mu^{\varepsilon}}[e(0,x)] = \int_{\mathbb{R}} J(u) \mathscr{W}_0(u) du \,.$$

La question était : **Peut-on avoir une équation macroscopique pour le profil d'énergie ?**

Oui et l'équation est :

$$\partial_t \mathscr{W}(t,u) = -(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}[\mathscr{W}](t,u) \,.$$

Échelle macroscopique

Avec :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \text{ si } B \neq 0 \text{ et } \alpha_B = \frac{3}{2} \text{ si } B = 0.$$

- Limite en une étape prouvée pour $B = 0$ par Jara, Komorowski et Olla en 2015 .

Un petit bilan historique

L'hypothèse initiale était :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum_{x \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon x)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}[e(0,x)] = \int_{\mathbb{R}} J(u)\mathscr{W}_0(u)du\,.$$

La question était : **Peut-on avoir une équation macroscopique pour le profil d'énergie ?**

Oui et l'équation est :

$$\partial_t \mathscr{W}(t,u) = -(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}[\mathscr{W}](t,u)\,.$$

Échelle macroscopique

Avec :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \text{ si } B \neq 0 \text{ et } \alpha_B = \frac{3}{2} \text{ si } B = 0.$$

- Limite en une étape prouvée pour $B = 0$ par Jara, Komorowski et Olla en 2015 .

Que se passe t'il si on remplace B par $B_N = BN^{-\delta}$?

Un processus d'interpolation

Soit $B_N = BN^{-\delta}$ avec $\delta > 0$. On travaille avec le tableau $\left(K_n^N, I_n^N\right)$.

Un processus d'interpolation

Soit $B_N = BN^{-\delta}$ avec $\delta > 0$. On travaille avec le tableau $\left(K_n^N, I_n^N\right)$.

On définit une mesure ν_δ sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$d\nu_\delta(r) \begin{cases} |r|^{-\frac{3}{2}-1} dr \text{ si } \delta > \frac{1}{2} \\ h_B(r) dr \text{ si } \delta = \frac{1}{2} \\ |r|^{-\frac{5}{3}-1} dr \text{ si } \delta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Un processus d'interpolation

Soit $B_N = BN^{-\delta}$ avec $\delta > 0$. On travaille avec le tableau $\left(K_n^N, I_n^N\right)$.

On définit une mesure ν_δ sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$d\nu_\delta(r) \begin{cases} |r|^{-\frac{3}{2}-1} dr \text{ si } \delta > \dfrac{1}{2} \\ h_B(r) dr \text{ si } \delta = \dfrac{1}{2} \\ |r|^{-\frac{5}{3}-1} dr \text{ si } \delta < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On note $Y_u^\delta(\,\cdot\,)$ le processus de Lévy de mesure ν_δ.

Un processus d'interpolation

Soit $B_N = BN^{-\delta}$ avec $\delta > 0$. On travaille avec le tableau $\left(K_n^N, I_n^N\right)$.

On définit une mesure ν_δ sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$d\nu_\delta(r) \begin{cases} |r|^{-\frac{3}{2}-1} dr \text{ si } \delta > \dfrac{1}{2} \\ h_B(r) dr \text{ si } \delta = \dfrac{1}{2} \\ |r|^{-\frac{5}{3}-1} dr \text{ si } \delta < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On note $Y_u^\delta(\cdot)$ le processus de Lévy de mesure ν_δ. Soit $r > 0$ alors :

$$\lim_{N\to\infty} N^{\alpha_\delta} \pi_{B_N}\left(\left\{(k,i), \lambda_{B_N}(k,i)\mathbf{v}_{B_N}(k) > Nr\right\}\right) = \nu_\delta(r, +\infty).$$

Avec :

$$\alpha_\delta = \frac{5-\delta}{3} \quad \text{si } \delta < \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \alpha_\delta = \frac{3}{2} \quad \text{si } \delta \geq \frac{1}{2}.$$

Un processus d'interpolation

Soit $B_N = BN^{-\delta}$ avec $\delta > 0$. On travaille avec le tableau $\left(K_n^N, I_n^N\right)$.

On définit une mesure ν_δ sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$d\nu_\delta(r)\begin{cases} |r|^{-\frac{3}{2}-1}dr \text{ si } \delta > \dfrac{1}{2} \\ h_B(r)dr \text{ si } \delta = \dfrac{1}{2} \\ |r|^{-\frac{5}{3}-1}dr \text{ si } \delta < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

On note $Y_u^\delta(\,\cdot\,)$ le processus de Lévy de mesure ν_δ. Soit $r > 0$ alors :

$$\lim_{N\to\infty} N^{\alpha_\delta}\pi_{B_N}\left(\left\{(k,i),\lambda_{B_N}(k,i)\mathbf{v}_{B_N}(k) > Nr\right\}\right) = \nu_\delta(r,+\infty).$$

Avec :

$$\alpha_\delta = \frac{5-\delta}{3} \text{ si } \delta < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_\delta = \frac{3}{2} \text{ si } \delta \geq \frac{1}{2}.$$

Thèorème [Cane 22'] : Les lois finis-dimensionnelles de $N^{-1}Z_u^N(N^{\alpha_B}\cdot)$ convergent faiblement vers $Y_u^\delta(\,\cdot\,)$.

Une EDP d'interpolation

Une EDP d'interpolation

Le générateur infinitésimal de $Y_u^\delta(\,\cdot\,)$ est donné par :

$$\mathcal{D}_\delta[\phi](u) = \begin{cases} -(-\Delta)^{\frac{3}{4}}[\phi](u) \text{ si } \delta > \dfrac{1}{2} \\ \mathcal{D}_B[\phi] \text{ si } \delta = \dfrac{1}{2} \\ -(-\Delta)^{\frac{5}{6}}[\phi](u) \text{ si } \delta < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Une EDP d'interpolation

Le générateur infinitésimal de $Y_u^\delta(\,\cdot\,)$ est donné par :

$$\mathscr{D}_\delta[\phi](u) = \begin{cases} -(-\Delta)^{\frac{3}{4}}[\phi](u) \text{ si } \delta > \dfrac{1}{2} \\ \mathscr{D}_B[\phi] \text{ si } \delta = \dfrac{1}{2} \\ -(-\Delta)^{\frac{5}{6}}[\phi](u) \text{ si } \delta < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Soit ρ_δ la solution sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ de :

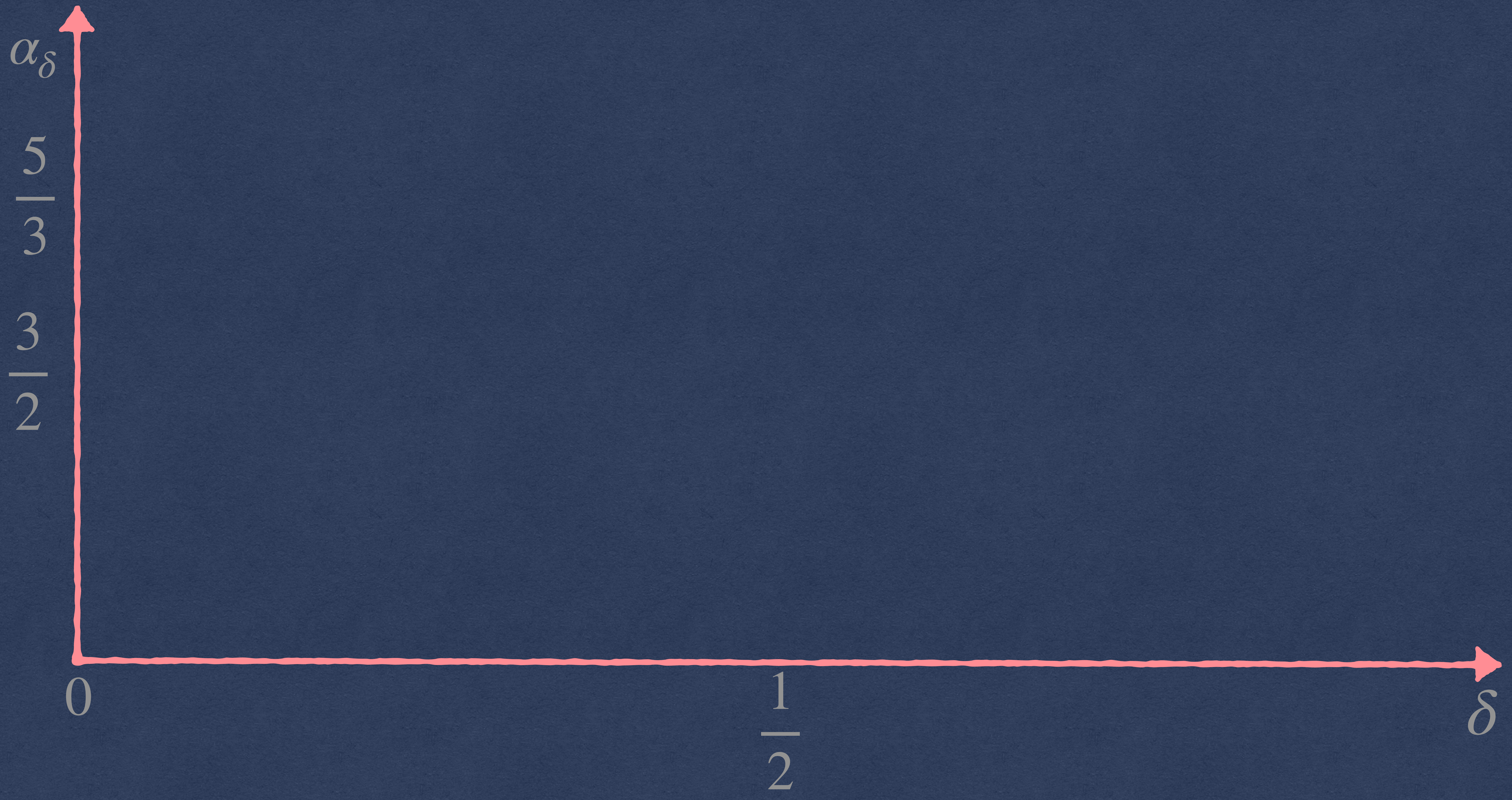
$$\partial_t \rho_\delta(t,u) = \mathscr{D}_\delta[\rho_\delta](t,u),$$

$$\rho_\delta(0,u) = \rho^0(u)\,.$$

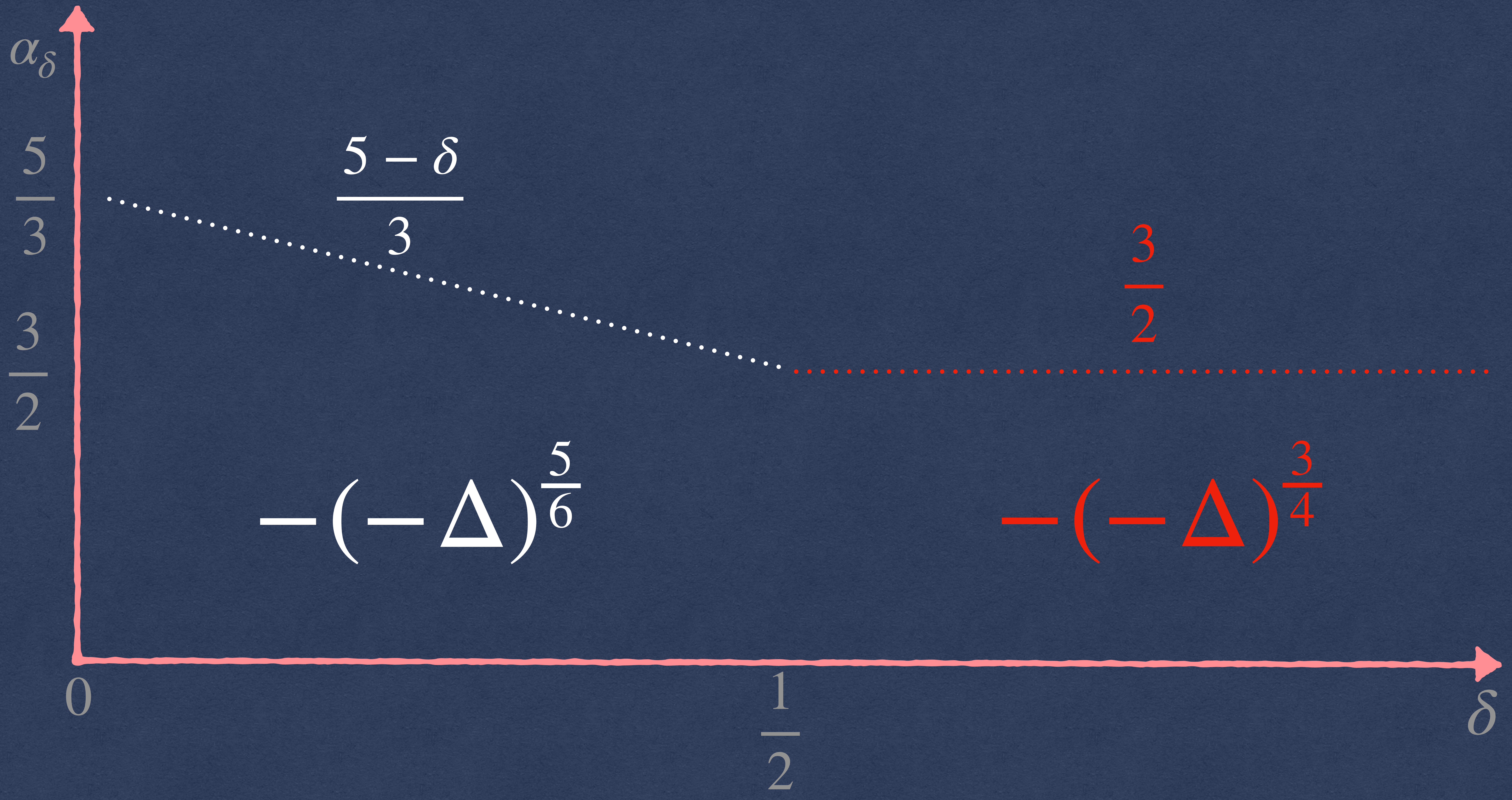
Théorème [Cane, 22']: $\lim_{N\to\infty} \int_{\mathbb{T}} \left| f^N\left(N^{\alpha_\delta} t, Nu, k\right) - \rho_\delta(t,u)\right|^2 dk = 0.$

Épilogue

Épilogue

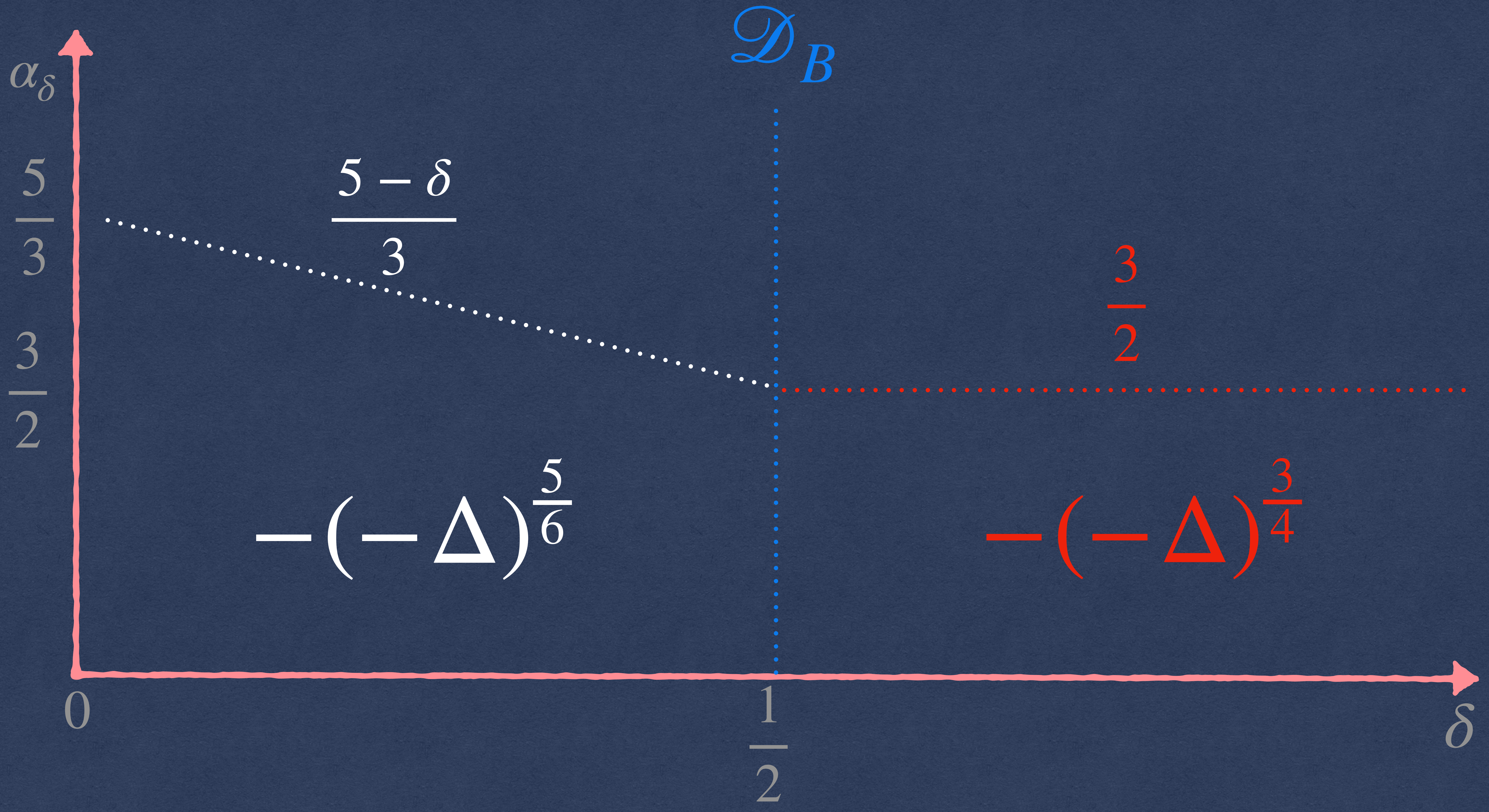


Épilogue

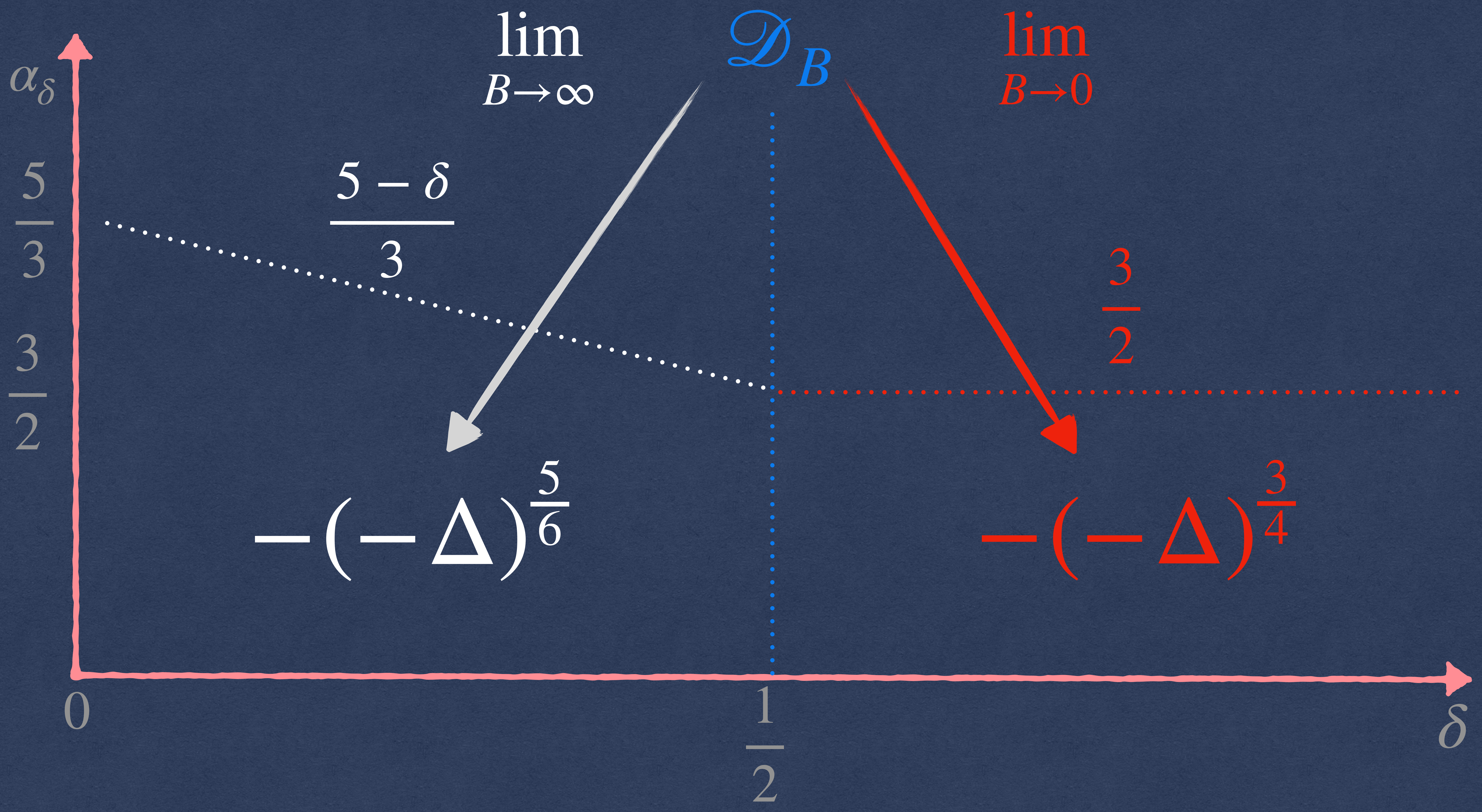


α_δ
$\frac{5}{3}$
$\frac{3}{2}$
$\frac{5-\delta}{3}$
$\frac{3}{2}$
$-(-\Delta)^{\frac{5}{6}}$
$-(-\Delta)^{\frac{3}{4}}$
0
$\frac{1}{2}$
δ

Épilogue

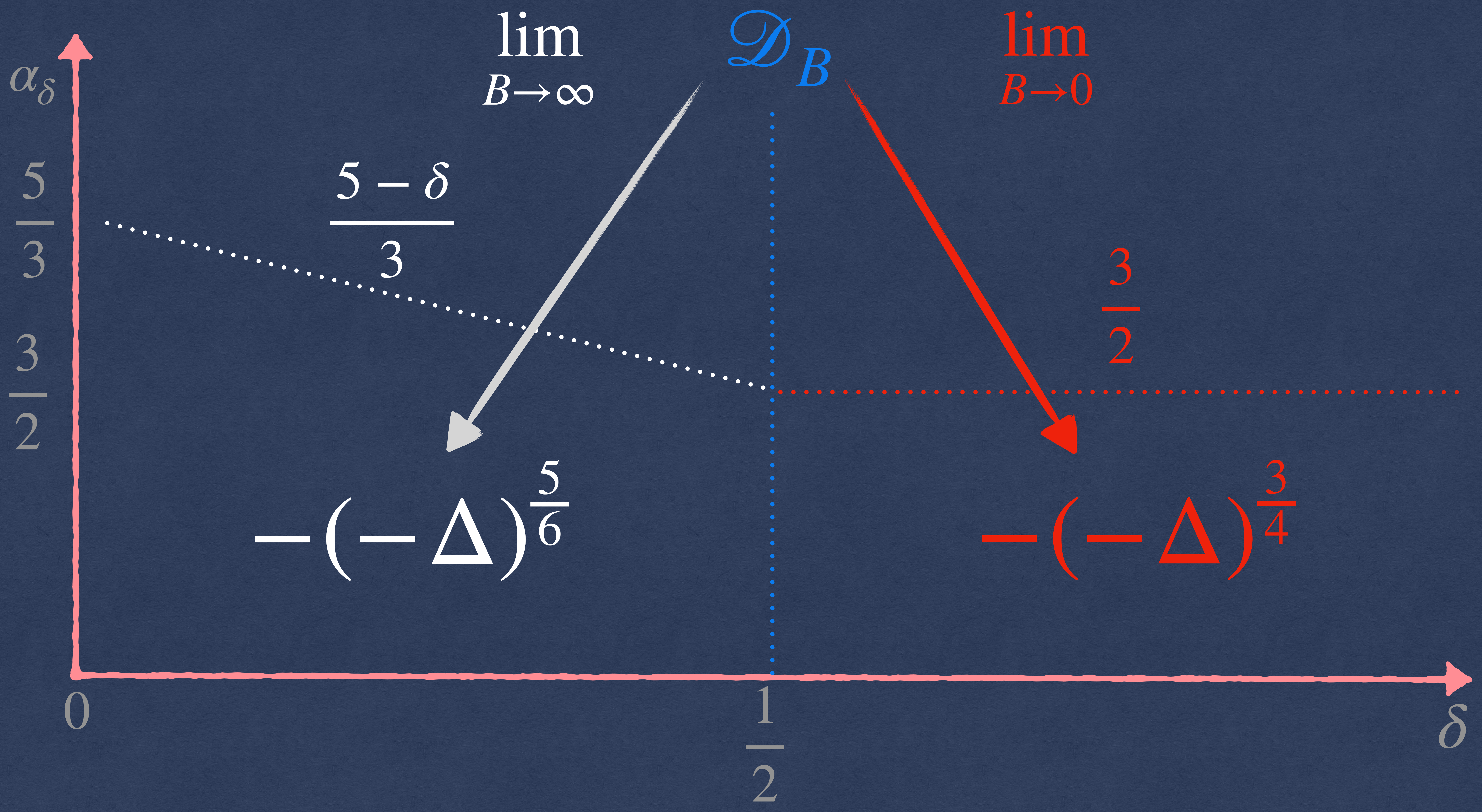

$\mathscr{D}_B$
α_δ
$\frac{5}{3}$
$\frac{3}{2}$
$\frac{5-\delta}{3}$
$\frac{3}{2}$
$-(-\Delta)^{\frac{5}{6}}$
$-(-\Delta)^{\frac{3}{4}}$
0
$\frac{1}{2}$
δ

Épilogue



$\lim_{B\to\infty}$
$\mathscr{D}_B$
$\lim_{B\to 0}$
α_δ
$\frac{5}{3}$
$\frac{3}{2}$
$\frac{5-\delta}{3}$
$\frac{3}{2}$
$-(-\Delta)^{\frac{5}{6}}$
$-(-\Delta)^{\frac{3}{4}}$
0
$\frac{1}{2}$
δ

Épilogue



Projet en cours : Étudier la transition en une seule étape.