Effet de localisation sur le transport de la chaleur dans une chaîne harmonique soumise à un champ magnétique aléatoire

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Journées de probabilités 2021

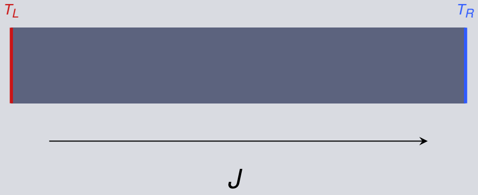
Travail en collaboration avec J.Bhat (ICTS Bangalore), A.Dhar (ICTS Bangalore) et C.Bernardin (LJAD).

Partie I

RÉSULTATS HISTORIQUES SUR LA CHAÎNE HARMONIQUE

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

1822 $\longrightarrow$ Loi *expérimentale* de Fourier :



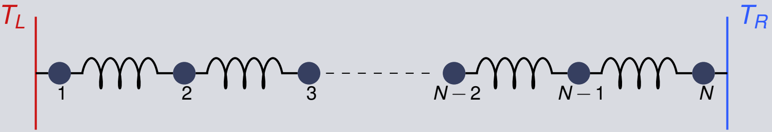
$$J(x) = -K\nabla T(x),$$

où K est la conductivité thermique du système.

Présentation du système

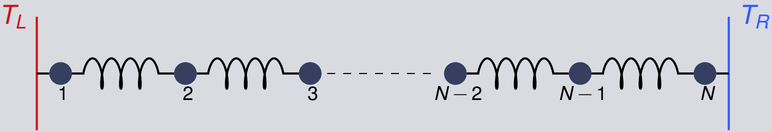
Gaëtan Cane
LJAD, UCA

On considère un système de N particules, $i \in \{1, \cdots, N\}$.



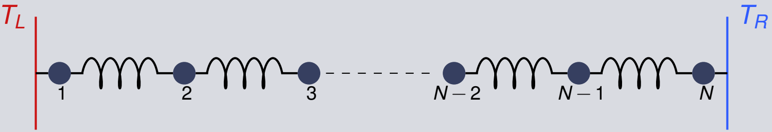
Présentation du système

On considère un système de N particules, $i \in \{1, \cdots, N\}$.



La position de la particule i, notée $x_i(\cdot)$, satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

On considère un système de N particules, $i \in \{1, \cdots, N\}$.

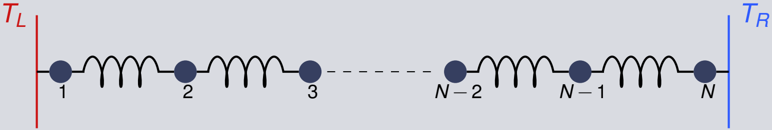


La position de la particule i, notée $x_i(\cdot)$, satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$m_i \ddot{x}_i = (x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i)$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

On considère un système de N particules, $i \in \{1, \cdots, N\}$.

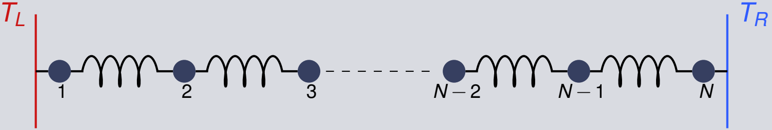


La position de la particule i, notée $x_i(\cdot)$, satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$m_i \ddot{x}_i = (x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) + (\delta_{i,1} T_L + \delta_{i,N} T_R)\sqrt{2 m_i} dW_i - (\delta_{i,1} + \delta_{i,N})\dot{x}_i,$$

Présentation du système

On considère un système de N particules, $i \in \{1, \cdots, N\}$.



La position de la particule i, notée $x_i(\cdot)$, satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$m_i \ddot{x}_i = (x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) + (\delta_{i,1} T_L + \delta_{i,N} T_R)\sqrt{2 m_i}\, dW_i - (\delta_{i,1} + \delta_{i,N})\dot{x}_i,$$

avec $x_0 = x_{N+1} = 0$.

État stationnaire

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Pour observer le courant thermique, le système doit atteindre l'état stationnaire.
La loi de Fourier s'écrit alors :

$$\langle J \rangle_s = -K \nabla T,$$

où $\langle \cdot \rangle_s$ représente l'espérance par rapport à la mesure stationnaire.

Résultats historiques

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

- **1967** $\rightarrow$ Lieb, Rieder et Lebowitz ont prouvé que :

$$\langle J \rangle_s \sim T_L - T_R \neq \frac{T_L - T_R}{N},$$

- **1967** $\rightarrow$ Lieb, Rieder et Lebowitz ont prouvé que :

$$\langle J\rangle_s \sim T_L - T_R \neq \frac{T_L - T_R}{N}, \quad \rightarrow K \sim N.$$

- **1967** $\to$ Lieb, Rieder et Lebowitz ont prouvé que :

$$\langle J \rangle_s \sim T_L - T_R \neq \frac{T_L - T_R}{N}, \quad \to K \sim N.$$

On suppose que $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d positives.

Résultats historiques

- **1967** $\to$ Lieb, Rieder et Lebowitz ont prouvé que :

$$\langle J \rangle_s \sim T_L - T_R \neq \frac{T_L - T_R}{N}, \quad \to K \sim N.$$

On suppose que $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d positives.

- **1971** $\to$ Casher et Lebowitz ont prouvé que :

$$\mathbb{E}\left[\langle J \rangle_s\right] \sim \frac{T_L - T_R}{N^{3/2}} \neq \frac{T_L - T_R}{N},$$

- **1967** $\rightarrow$ Lieb, Rieder et Lebowitz ont prouvé que :

$$\langle J \rangle_s \sim T_L - T_R \neq \frac{T_L - T_R}{N}, \quad \rightarrow K \sim N.$$

On suppose que $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d positives.

- **1971** $\rightarrow$ Casher et Lebowitz ont prouvé que :

$$\mathbb{E}\left[\langle J \rangle_s\right] \sim \frac{T_L - T_R}{N^{3/2}} \neq \frac{T_L - T_R}{N}, \quad \rightarrow K \sim N^{-1/2}.$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Partie II

ÉTUDE DU SYSTÈME SOUMIS À UN CHAMP MAGNÉTIQUE

Présentation du système

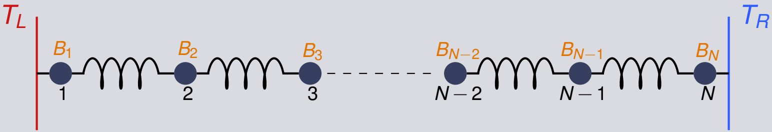
Gaëtan Cane
LJAD,
UCA

On considère une chaîne harmonique deux-dimensionnelle soumise à un champ magnétique.
Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Présentation du système

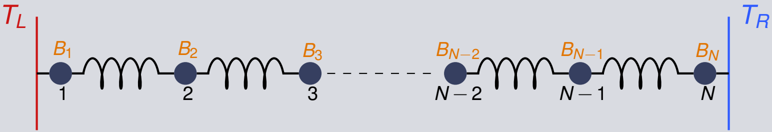
GAËTAN CANE
LJAD, UCA

On considère une chaîne harmonique deux-dimensionnelle soumise à un champ magnétique.
Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.



Présentation du système

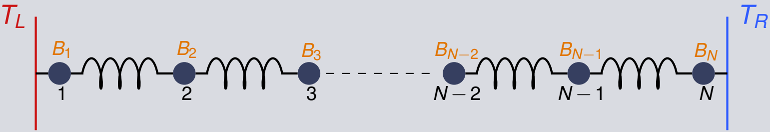
On considère une chaîne harmonique deux-dimensionnelle soumise à un champ magnétique.
Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.



Une particule est maintenant représentée par un vecteur deux-dimensionnelle (x_i, y_i).
On a alors :

Présentation du système

On considère une chaîne harmonique deux-dimensionnelle soumise à un champ magnétique.
Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

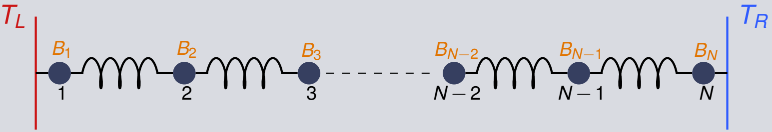


Une particule est maintenant représentée par un vecteur deux-dimensionnelle (x_i, y_i).
On a alors :

$$\ddot{x}_i = (x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) + (\delta_{i,1} T_L + \delta_{i,N} T_R)\sqrt{2}\mathcal{W}_i^x - (\delta_{i,1} + \delta_{i,N})\dot{x}_i$$

$$\ddot{y}_i = (y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i) + (\delta_{i,1} T_L + \delta_{i,N} T_R)\sqrt{2}\mathcal{W}_i^y - (\delta_{i,1} + \delta_{i,N})\dot{y}_i$$

On considère une chaîne harmonique deux-dimensionnelle soumise à un champ magnétique.
Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.



Une particule est maintenant représentée par un vecteur deux-dimensionnelle (x_i, y_i).
On a alors :

$$\ddot{x}_i = (x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) + (\delta_{i,1} T_L + \delta_{i,N} T_R)\sqrt{2}\mathcal{W}_i^x - (\delta_{i,1} + \delta_{i,N})\dot{x}_i + B_i \dot{y}_i,$$

$$\ddot{y}_i = (y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i) + (\delta_{i,1} T_L + \delta_{i,N} T_R)\sqrt{2}\mathcal{W}_i^y - (\delta_{i,1} + \delta_{i,N})\dot{y}_i - B_i \dot{x}_i.$$

Expressions des solutions

En passant en Fourier on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \Pi(\omega) & \mathcal{B}(\omega) \\ -\mathcal{B}(\omega) & \Pi(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(\omega) \\ Y(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}^x(\omega) \\ \mathcal{W}^y(\omega) \end{pmatrix}.$$

Pour $i \in \{1, \cdots, N\}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ on a :

Expressions des solutions

En passant en Fourier on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \Pi(\omega) & \mathcal{B}(\omega) \\ -\mathcal{B}(\omega) & \Pi(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(\omega) \\ Y(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}^x(\omega) \\ \mathcal{W}^y(\omega) \end{pmatrix}.$$

Pour $i \in \{1, \cdots, N\}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ on a :

$$\tilde{x}_i(\omega) = \sum_{j=1}^{N} [G_1(\omega)]_{ij} \tilde{\mathcal{W}}_j^x(\omega) + \sum_{j=1}^{N} [G_2(\omega)]_{ij} \tilde{\mathcal{W}}_j^y(\omega),$$

$$\tilde{y}_i(\omega) = -\sum_{j=1}^{N} [G_2\omega)]_{ij} \tilde{\mathcal{W}}_j^x(\omega) + \sum_{j=1}^{N} [G_1(\omega)]_{ij} \tilde{\mathcal{W}}_j^y(\omega),$$

où :

En passant en Fourier on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} \Pi(\omega) & \mathcal{B}(\omega) \\ -\mathcal{B}(\omega) & \Pi(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(\omega) \\ Y(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}^x(\omega) \\ \mathcal{W}^y(\omega) \end{pmatrix}.$$

Pour $i \in \{1, \cdots, N\}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ on a :

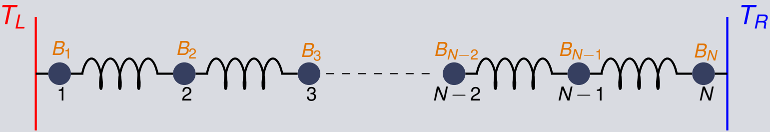
$$\tilde{x}_i(\omega) = \sum_{j=1}^{N} [G_1(\omega)]_{ij} \tilde{\mathcal{W}}_j^x(\omega) + \sum_{j=1}^{N} [G_2(\omega)]_{ij} \tilde{\mathcal{W}}_j^y(\omega),$$

$$\tilde{y}_i(\omega) = -\sum_{j=1}^{N} [G_2\omega)]_{ij} \tilde{\mathcal{W}}_j^x(\omega) + \sum_{j=1}^{N} [G_1(\omega)]_{ij} \tilde{\mathcal{W}}_j^y(\omega),$$

où :

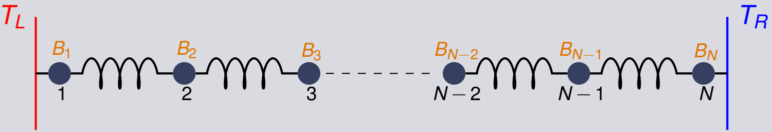
$$G_1(\omega) = \frac{1}{\Pi(\omega) + \mathcal{B}(\omega)[\Pi(\omega)]^{-1}\mathcal{B}(\omega)} \quad \text{et} \quad G_2(\omega) = -G_1(\omega)\mathcal{B}(\omega)[\Pi(\omega)]^{-1}.$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA



On note $\overrightarrow{F_L}$ la force exercée sur le premier oscillateur due au réservoir de gauche.

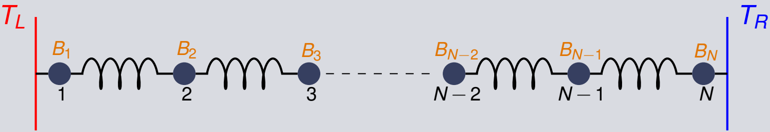
Gaëtan Cane
LJAD, UCA



On note $\overrightarrow{F_L}$ la force exercée sur le premier oscillateur due au réservoir de gauche.

$$\overrightarrow{J} = \overrightarrow{F_L} \cdot (x_1, y_1)^T.$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA



On note $\overrightarrow{F_L}$ la force exercée sur le premier oscillateur due au réservoir de gauche.

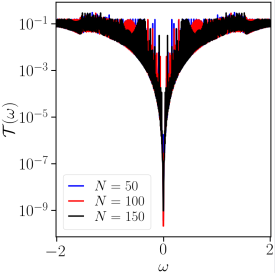
$$\overrightarrow{J} = \overrightarrow{F_L} \cdot (x_1, y_1)^T.$$

Après calculs on obtient :

$$\langle J \rangle_s = \frac{4(T_L - T_R)}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathcal{T}_N(\omega) d\omega.$$

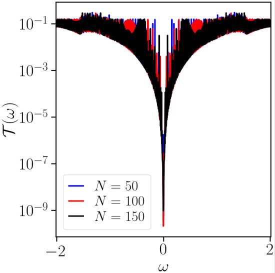
Graphe de la transmission

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

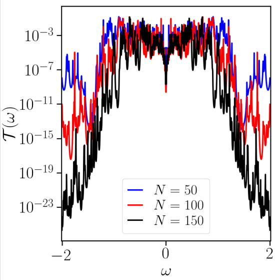


Transmission pour un champ magnétique constant.

Graphe de la transmission

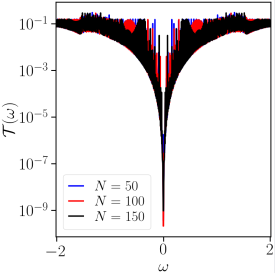


Transmission pour un champ magnétique constant.

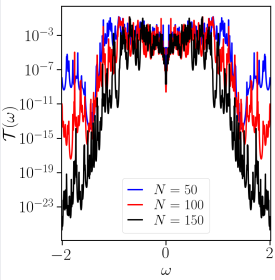


Transmission pour un champ magnétique aléatoire.

Graphe de la transmission



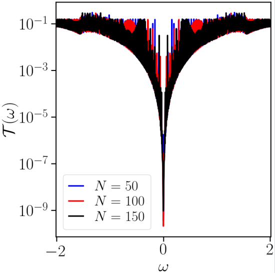
Transmission pour un champ magnétique constant.



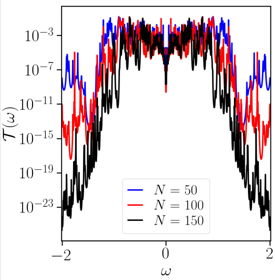
Transmission pour un champ magnétique aléatoire.

- L'aléa entraine la suppression de la transmission.

Graphe de la transmission



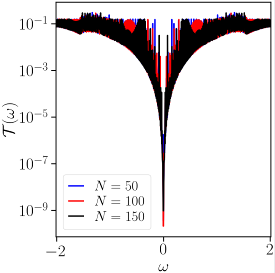
Transmission pour un champ magnétique constant.



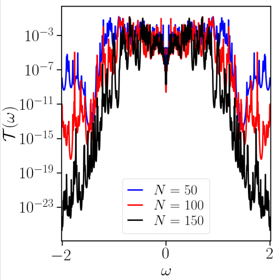
Transmission pour un champ magnétique aléatoire.

- L'aléa entraine la suppression de la transmission.
- $\mathcal{T}$ est une fonction décroissante en N.

Graphe de la transmission



Transmission pour un champ magnétique constant.



Transmission pour un champ magnétique aléatoire.

- L'aléa entraine la suppression de la transmission.
- $\mathcal{T}$ est une fonction décroissante en N.
- $\mathcal{T}$ est plus important près de $\omega = 0$.

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

On a :

$$\mathcal{T}_N(\omega) = \frac{\omega^2}{\left|f_N^+ + i\omega(g_N^+ + f_{N-1}^+) - \omega^2 g_{N-1}^+\right|^2} + \frac{\omega^2}{\left|f_N^- + i\omega(g_N^- + f_{N-1}^-) - \omega^2 g_{N-1}^-\right|^2}.$$

Gaëtan Cane
LJAD,
UCA

On a :

$$\mathcal{T}_N(\omega) = \frac{\omega^2}{\left|f_N^+ + i\omega(g_N^+ + f_{N-1}^+) - \omega^2 g_{N-1}^+\right|^2} + \frac{\omega^2}{\left|f_N^- + i\omega(g_N^- + f_{N-1}^-) - \omega^2 g_{N-1}^-\right|^2}.$$

où $(f_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des processus stochastiques définis par :

$$f_{n+1}^- = (2 - \omega^2 - \omega B_{n+1}) f_n^- - f_{n-1}^-, \quad f_0- = 1, \quad f_1^- = c_1 - \omega^2 - \omega B_1,$$
$$g_{n+1}^- = (2 - \omega^2 - \omega B_{n+1}) g_n^- - g_{n-1}^-, \quad g_0^- = 0, \quad g_1^- = 1.$$

Explication théorique du phénomène - 1

GAËTAN CANE LJAD, UCA

Système

Courant thermique

Phénomène

Explication numérique

Explication théorique

Processus de Markov

Théorème sur λ

Exposant de Lyapunov

Théorème

On a :

$$\mathcal{T}_N(\omega) = \frac{\omega^2}{\left|f_N^+ + i\omega(g_N^+ + f_{N-1}^+) - \omega^2 g_{N-1}^+\right|^2} + \frac{\omega^2}{\left|f_N^- + i\omega(g_N^- + f_{N-1}^-) - \omega^2 g_{N-1}^-\right|^2}.$$

où $(f_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des processus stochastiques définis par :

$$f_{n+1}^- = (2 - \omega^2 - \omega B_{n+1}) f_n^- - f_{n-1}^-, \quad f_0 - = 1, \quad f_1^- = c_1 - \omega^2 - \omega B_1,$$
$$g_{n+1}^- = (2 - \omega^2 - \omega B_{n+1}) g_n^- - g_{n-1}^-, \quad g_0^- = 0, \quad g_1^- = 1.$$

Soit $X_n = (f_{n+1}^-, f_n^-)^\top$.

On a :

$$\mathcal{T}_N(\omega) = \frac{\omega^2}{\left|f_N^+ + i\omega(g_N^+ + f_{N-1}^+) - \omega^2 g_{N-1}^+\right|^2} + \frac{\omega^2}{\left|f_N^- + i\omega(g_N^- + f_{N-1}^-) - \omega^2 g_{N-1}^-\right|^2}.$$

où $(f_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des processus stochastiques définis par :

$$f_{n+1}^- = (2-\omega^2-\omega B_{n+1})f_n^- - f_{n-1}^-, \quad f_0- = 1, \quad f_1^- = c_1 - \omega^2 - \omega B_1,$$
$$g_{n+1}^- = (2-\omega^2-\omega B_{n+1})g_n^- - g_{n-1}^-, \quad g_0^- = 0, \quad g_1^- = 1.$$

Soit $X_n = (f_{n+1}^-, f_n^-)^\top$.

Alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = \begin{pmatrix} 2-\omega^2-\omega B_{n+1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_n.$$

Explication théorique du phénomène - 2

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Par le théorème de Furstenberg on a :

$$\mathbb{E}\left[\left\|\prod_{n=0}^{N}\begin{pmatrix}2-\omega^2-\omega B_{n+1} & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\|\right] \sim \exp\left(N\lambda(\omega)\right),$$

où $\lambda(\cdot)$ est l'exposant de Lyapunov associé à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Explication théorique du phénomène - 2

Par le théorème de Furstenberg on a :

$$\mathbb{E}\left[\left\|\prod_{n=0}^{N}\begin{pmatrix}2-\omega^2-\omega B_{n+1} & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\|\right]\sim\exp\left(N\lambda(\omega)\right),$$

où $\lambda(\cdot)$ est l'exposant de Lyapunov associé à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

λ vérifie les propriétés suivantes :

- $\lambda(\omega) > 0$ pour $\omega > 0$.
- $\lim_{\omega\to 0}\lambda(\omega) = 0$.

Par le théorème de Furstenberg on a :

$$\mathbb{E}\left[\left\|\prod_{n=0}^{N}\begin{pmatrix}2-\omega^2-\omega B_{n+1} & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\|\right]\sim\exp\left(N\lambda(\omega)\right),$$

où $\lambda(\cdot)$ est l'exposant de Lyapunov associé à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

λ vérifie les propriétés suivantes :

- $\lambda(\omega)>0$ pour $\omega>0$.
- $\lim\limits_{\omega\to 0}\lambda(\omega)=0$.

Par conséquent on a :

$$\mathbb{E}[\mathcal{T}_N(\omega)]\sim\exp\left(-N\lambda(\omega)\right).$$

Explication théorique du phénomène - 2

Par le théorème de Furstenberg on a :

$$\mathbb{E}\left[\left\|\prod_{n=0}^{N}\begin{pmatrix}2-\omega^2-\omega B_{n+1} & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\|\right] \sim \exp\left(N\lambda(\omega)\right),$$

où $\lambda(\cdot)$ est l'exposant de Lyapunov associé à $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

λ vérifie les propriétés suivantes :

- $\lambda(\omega) > 0$ pour $\omega > 0$.
- $\lim\limits_{\omega\to 0}\lambda(\omega) = 0$.

Par conséquent on a :

$$\mathbb{E}[\mathcal{T}_N(\omega)] \sim \exp\left(-N\lambda(\omega)\right).$$

Décroissance exponentielle de la transmission pour $\omega < \lambda^{-1}(N)$.

Explication théorique du phénomène - 3

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle J\rangle_s] &= \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_0^{\lambda^{-1}(N)} \mathbb{E}[\mathcal{T}_N(\omega)]\,d\omega \\ &+ \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_{\lambda^{-1}(N)}^{+\infty} \mathbb{E}[\mathcal{T}_N(\omega)]\,d\omega\end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\langle J\rangle_s\right] &= \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_0^{\lambda^{-1}(N)} \mathbb{E}\left[\mathcal{T}_N(\omega)\right] d\omega \\ &+ \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_{\lambda^{-1}(N)}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\mathcal{T}_N(\omega)\right] d\omega \\ &= \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_0^{\lambda^{-1}(N)} \mathbb{E}\left[\mathcal{T}_N(\omega)\right] d\omega \\ &+ \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_{\lambda^{-1}(N)}^{+\infty} \exp\left(-N\lambda(\omega)\right) d\omega\end{aligned}$$

Explication théorique du phénomène - 3

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

On obtient alors :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle J\rangle_s] &= \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_0^{\lambda^{-1}(N)} \mathbb{E}[\mathcal{T}_N(\omega)]\,d\omega \\
&+ \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_{\lambda^{-1}(N)}^{+\infty} \mathbb{E}[\mathcal{T}_N(\omega)]\,d\omega \\
&= \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_0^{\lambda^{-1}(N)} \mathbb{E}[\mathcal{T}_N(\omega)]\,d\omega \\
&+ \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_{\lambda^{-1}(N)}^{+\infty} \exp(-N\lambda(\omega))\,d\omega \\
&\sim \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_0^{\lambda^{-1}(N)} \mathcal{T}_\infty(\omega)d\omega,
\end{aligned}
$$

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\langle J\rangle_s] &= \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_0^{\lambda^{-1}(N)} \mathbb{E}[\mathcal{T}_N(\omega)]\,d\omega \\
&+ \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_{\lambda^{-1}(N)}^{+\infty} \mathbb{E}[\mathcal{T}_N(\omega)]\,d\omega \\
&= \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_0^{\lambda^{-1}(N)} \mathbb{E}[\mathcal{T}_N(\omega)]\,d\omega \\
&+ \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_{\lambda^{-1}(N)}^{+\infty} \exp(-N\lambda(\omega))\,d\omega \\
&\sim \frac{4(T_L - T_R)}{\pi}\int_0^{\lambda^{-1}(N)} \mathcal{T}_\infty(\omega)d\omega,
\end{aligned}$$

où $\mathcal{T}_\infty$ représente la transmission pour une chaîne harmonique soumise à un champ magnétique d'intensité $\langle B\rangle$.

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

On a donc :

$$\mathbb{E}\left[\langle J \rangle_s\right] \sim \frac{4(T_L - T_R)}{\pi} \int_0^{\lambda^{-1}(N)} \mathcal{T}_\infty(\omega) d\omega.$$

Explication théorique du phénomène - 4

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

On a donc :

$$\mathbb{E}\left[\langle J\rangle_s\right] \sim \frac{4(T_L - T_R)}{\pi} \int_0^{\lambda^{-1}(N)} \mathcal{T}_\infty(\omega) d\omega.$$

On peut montrer que :

- Si $\langle B\rangle \neq 0$, alors $\mathcal{T}_\infty(\omega) \sim \omega^{3/2}$.

Explication théorique du phénomène - 4

On a donc :

$$\mathbb{E}\left[\langle J \rangle_s\right] \sim \frac{4(T_L - T_R)}{\pi} \int_0^{\lambda^{-1}(N)} \mathcal{T}_\infty(\omega) d\omega.$$

On peut montrer que :

- Si $\langle B \rangle \neq 0$, alors $\mathcal{T}_\infty(\omega) \sim \omega^{3/2}$.
- Si $\langle B \rangle = 0$, alors $\mathcal{T}_\infty(\omega) \sim \omega^2$.

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

On rappelle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1}^{-} = (2 - \omega^2 - \omega B_{n+1}) f_n^{-} - f_{n-1}^{-}.$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

On rappelle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^-_{n+1} = (2 - \omega^2 - \omega B_{n+1}) f^-_n - f^-_{n-1}.$$

Soit :

$$f^-_{n+1} + f^-_{n-1} - 2f^-_n = -\omega \langle B \rangle f^-_n - \omega (B_{n+1} - \langle B \rangle) f^-_n + O(\omega^2).$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

On rappelle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^-_{n+1} = (2 - \omega^2 - \omega B_{n+1}) f^-_n - f^-_{n-1}.$$

Soit :

$$f^-_{n+1} + f^-_{n-1} - 2f^-_n = -\omega \langle B \rangle f^-_n - \omega (B_{n+1} - \langle B \rangle) f^-_n + O(\omega^2).$$

En passant à la limite continue on obtient :

$$\forall t \geq 0, \quad \ddot{f}(t) = -\omega \langle B \rangle f(t) - \omega \sigma \eta_t f(t),$$

où $\eta_t = B(t) - \langle B \rangle$ et $\sigma = \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2$.

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

$$\forall t \geq 0, \quad \ddot{f}(t) = -\omega\langle B\rangle f(t) - \omega\sigma\eta_t f(t),$$

$$\forall t \geq 0, \quad \ddot{f}(t) = -\omega\langle B\rangle f(t) - \omega\sigma\eta_t f(t),$$

On peut alors écrire que :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f(t) \\ \dot{f}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega\langle B\rangle & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(t) \\ \dot{f}(t) \end{pmatrix} + \omega\eta_t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(t) \\ \dot{f}(t) \end{pmatrix}.$$

$$\forall t \geq 0, \quad \ddot{f}(t) = -\omega\langle B\rangle f(t) - \omega\sigma\eta_t f(t),$$

On peut alors écrire que :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f(t) \\ \dot{f}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega\langle B\rangle & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(t) \\ \dot{f}(t) \end{pmatrix} + \omega\eta_t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(t) \\ \dot{f}(t) \end{pmatrix}.$$

C'est une équation sous la forme :

$$\forall t \geq 0, \quad \dot{z}(t) = A_0 z(t) + \omega\eta_t A_1 z(t).$$

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Théorème (Wihstutz en 1999)

Soit $c \in \mathbb{R}$ et z un processus stochastique. On considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad \dot{z}(t) = A_0 z(t) + \sigma \varepsilon \eta_t A_1 z(t),$$

avec :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème (Wihstutz en 1999)

Soit $c \in \mathbb{R}$ et z un processus stochastique. On considère l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\forall t \geq 0, \quad \dot{z}(t) = A_0 z(t) + \sigma\varepsilon\eta_t A_1 z(t),$$

avec :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors :

- *Si $c > 0$, $\lambda(\varepsilon) = \frac{\sigma^2\varepsilon^2}{8c} + \mathcal{O}(\varepsilon^6)$.*
- *Si $c < 0$, $\lambda(\varepsilon) = \sqrt{-c} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$.*
- *Si $c = 0$, $\lambda(\varepsilon) = \hat{\lambda}\varepsilon^{2/3} + \mathcal{O}(\varepsilon)$.*

où λ est l'exposant de Lyapunov associé au processus z.

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Dans notre cas on a $\varepsilon = \omega$ et $c = \omega\langle B \rangle$.

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Dans notre cas on a $\varepsilon = \omega$ et $c = \omega\langle B\rangle$.

- Pour $\langle B\rangle = 0$ on obtient $\lambda(\omega) = \hat{\lambda}\omega^{2/3}$.

Exposant de Lyapunov pour le processus de Markov

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Dans notre cas on a $\varepsilon = \omega$ et $c = \omega\langle B\rangle$.

- Pour $\langle B\rangle = 0$ on obtient $\lambda(\omega) = \hat{\lambda}\omega^{2/3}$.

Pour $\langle B\rangle \neq 0$ on effectue le changement de temps :

$$\tilde{t} = \sqrt{\omega}t,$$

Dans notre cas on a $\varepsilon = \omega$ et $c = \omega\langle B\rangle$.

- Pour $\langle B\rangle = 0$ on obtient $\lambda(\omega) = \hat{\lambda}\omega^{2/3}$.

Pour $\langle B\rangle \neq 0$ on effectue le changement de temps :

$$\tilde{t} = \sqrt{\omega}t,$$

ainsi :

$$\lambda = \tilde{\lambda}\sqrt{\omega},$$

où $\tilde{\lambda}$ est l'exposant de Lyapunov associé à :

$$\forall t \geq 0, \quad \dot{\tilde{z}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\langle B\rangle & 0 \end{pmatrix} \tilde{z}(t) + \sigma\omega^{1/4}\xi_t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{z}(t).$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Exposant de Lyapunov pour le processus de Markov

Dans notre cas on a $\varepsilon = \omega$ et $c = \omega\langle B\rangle$.

- Pour $\langle B\rangle = 0$ on obtient $\lambda(\omega) = \hat{\lambda}\omega^{2/3}$.

Pour $\langle B\rangle \neq 0$ on effectue le changement de temps :

$$\tilde{t} = \sqrt{\omega}t,$$

ainsi :

$$\lambda = \tilde{\lambda}\sqrt{\omega},$$

où $\tilde{\lambda}$ est l'exposant de Lyapunov associé à :

$$\forall t \geq 0, \quad \dot{\tilde{z}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\langle B\rangle & 0 \end{pmatrix} \tilde{z}(t) + \sigma\omega^{1/4}\xi_t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{z}(t).$$

- Pour $\langle B\rangle > 0$, $\lambda(\omega) = \frac{\sigma^2\omega}{8\langle B\rangle} + O(\omega^{5/4})$.
- Pour $\langle B\rangle < 0$, $\lambda(\omega) = \sqrt{|\langle B\rangle|}\omega^{1/2} + O(\omega^{5/2})$.

Résultat sur la taille du courant

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Résultat principal

Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d :

Résultat sur la taille du courant

Résultat principal

Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d :

- Si $\mathbb{E}[B_1] \neq 0$ alors $\mathbb{E}[\langle J\rangle_s] \sim N^{-5/2}$,

Résultat sur la taille du courant

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Résultat principal

Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d :

- Si $\mathbb{E}[B_1] \neq 0$ alors $\mathbb{E}[\langle J\rangle_s] \sim N^{-5/2}, \quad \to K \sim N^{-3/2}$.

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Résultat principal

Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d :

- Si $\mathbb{E}[B_1] \neq 0$ alors $\mathbb{E}[\langle J\rangle_s] \sim N^{-5/2}$, $\quad \to K \sim N^{-3/2}$.
- Si $\mathbb{E}[B_1] = 0$ alors $\mathbb{E}[\langle J\rangle_s] \sim N^{-9/2}$,

Résultat sur la taille du courant

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Résultat principal

Soit $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d :

- Si $\mathbb{E}[B_1] \neq 0$ alors $\mathbb{E}[\langle J\rangle_s] \sim N^{-5/2}, \quad \rightarrow K \sim N^{-3/2}$.
- Si $\mathbb{E}[B_1] = 0$ alors $\mathbb{E}[\langle J\rangle_s] \sim N^{-9/2}, \quad \rightarrow K \sim N^{-7/2}$.

Bibliographie

RIEDER Z, LEBOWITZ J. L, LIEB E. (1967) Properties of a Harmonic Crystal in a Stationary Nonequilibrium State. In: Nachtergaele B., Solovej J.P., Yngvason J. (eds) Statistical Mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg.

RUBIN R, GREER W. (1971) Abnormal Lattice Thermal Conductivity of a One-Dimensional, Harmonic, Isotopically Disordered Crystal. Journal of Mathematical Physics. 12. 1686-1701. 10.1063/1.1665793.

CASHER A, LEBOWITZ J. L. (1971) Heat flow in regular and disordered harmonic chains. In: Journal of Mathematical Physics. Vol. 12, No. 8. pp. 1701-1711.

WIHSTUTZ V. (1999) Perturbation Methods for Lyapunov Exponents. In: Stochastic Dynamics. Springer, New York, NY.