Étude de la superdiffusion d'énergie d'une chaîne harmonique bruitée soumise à un champ magnétique

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

25/10/2021

Chaîne harmonique

Chaîne harmonique

$q(x,t) := (q_1(x,t), q_2(x,t))$: position de la particule x au temps t.
$p(x,t) := (p_1(x,t), p_2(x,t))$: vitesse de la particule x au temps t.

Chaîne harmonique

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$q(x,t) := (q_1(x,t), q_2(x,t))$: position de la particule x au temps t.
$p(x,t) := (p_1(x,t), p_2(x,t))$: vitesse de la particule x au temps t.

Échelle microscopique

Chaîne harmonique

$q(x,t) := (q_1(x,t), q_2(x,t))$: position de la particule x au temps t.
$p(x,t) := (p_1(x,t), p_2(x,t))$: vitesse de la particule x au temps t.

Échelle microscopique

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} q_i(x,t) &= p_i(x,t) \\
\frac{d}{dt} p_i(x,t) &= q_i(x+1,t) + q_n(x-1,t) - 2q_n(x,t)
\end{aligned}$$

Chaîne harmonique

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$q(x,t) := (q_1(x,t), q_2(x,t))$: position de la particule x au temps t.
$p(x,t) := (p_1(x,t), p_2(x,t))$: vitesse de la particule x au temps t.

Échelle microscopique

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} q_i(x,t) &= p_i(x,t) \\
\frac{d}{dt} p_i(x,t) &= q_i(x+1,t) + q_n(x-1,t) - 2q_n(x,t) \\
&+ B\left(\delta_{i,1} p_2(x,t) - \delta_{i,2} p_1(x,t)\right)
\end{aligned}
$$

Chaîne harmonique

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$q(x,t) := (q_1(x,t), q_2(x,t))$: position de la particule x au temps t.
$p(x,t) := (p_1(x,t), p_2(x,t))$: vitesse de la particule x au temps t.

Échelle microscopique

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} q_i(x,t) &= p_i(x,t) \\
\frac{d}{dt} p_i(x,t) &= q_i(x+1,t) + q_n(x-1,t) - 2q_n(x,t) \\
&+ B(\delta_{i,1} p_2(x,t) - \delta_{i,2} p_1(x,t)) + \varepsilon \text{ noise}.
\end{aligned}
$$

Chaîne harmonique

$q(x,t) := (q_1(x,t), q_2(x,t))$: position de la particule x au temps t.
$p(x,t) := (p_1(x,t), p_2(x,t))$: vitesse de la particule x au temps t.

Échelle microscopique

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} q_i(x,t) &= p_i(x,t) \\
\frac{d}{dt} p_i(x,t) &= q_i(x+1,t) + q_n(x-1,t) - 2q_n(x,t) \\
&+ B(\delta_{i,1} p_2(x,t) - \delta_{i,2} p_1(x,t)) + \varepsilon \text{ noise}.
\end{aligned}
$$

Générateur infinitésimal de la dynamique

$$\mathcal{A} + B\mathcal{G} + \varepsilon\, \mathcal{S}.$$

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Energie au temps t :

$$E(t) \quad := \quad \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |p(x,t)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |q(x+1,t) - q(x-1,t)|^2$$

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$
\begin{aligned}
E(t) \quad &:= \quad \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |p(x,t)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |q(x+1,t) - q(x-1,t)|^2 \\
&:= \quad \sum_{x_i n\mathbb{Z}} e_x(t).
\end{aligned}
$$

Objectif de l'étude

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Energie au temps t :

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |p(x,t)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |q(x+1,t)-q(x-1,t)|^2 \\ &:= \sum_{x_i n\mathbb{Z}} e_x(t). \end{aligned}$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment.

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$
\begin{aligned}
E(t) &:= \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |p(x,t)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |q(x+1,t)-q(x-1,t)|^2 \\
&:= \sum_{x_i n\mathbb{Z}} e_x(t).
\end{aligned}
$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment. Soit μ^{ε} la distribution initiale de la dynamique.

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |p(x,t)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |q(x+1,t) - q(x-1,t)|^2 \\ &:= \sum_{x_i n\mathbb{Z}} e_x(t). \end{aligned}$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment. Soit μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Hypothèse naturelle sur le système

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$E(t) := \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |p(x,t)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |q(x+1,t)-q(x-1,t)|^2$$
$$:= \sum_{x_i n\mathbb{Z}} e_x(t).$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment. Soit μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Hypothèse naturelle sur le système

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{x\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon x)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[e_x(0)\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u)J(u)du.$$

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |p(x,t)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\mathbb{Z}} |q(x+1,t)-q(x-1,t)|^2 \\ &:= \sum_{x_i n\mathbb{Z}} e_x(t). \end{aligned}$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment. Soit μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Hypothèse naturelle sur le système

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{x\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon x)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[e_x(0)\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u)J(u)du.$$

Peut-on avoir une équation pour $\mathcal{W}(t,u)$?

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Soit $(\widehat{\Psi}_i)_{i\in\{1,2\}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définit par

$$\forall i \in \{1,2\}, \quad (\mathcal{A} + B\mathcal{G})[\widehat{\psi}_i(k,t)] = -\mathbf{i}\,\omega_i(k)\widehat{\psi}_i(k,t).$$

Soit $(\widehat{\Psi}_i)_{i\in\{1,2\}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définit par

$$\forall i \in \{1,2\}, \quad (\mathcal{A} + B\mathcal{G})[\widehat{\psi}_i(k,t)] = -\mathbf{i}\,\omega_i(k)\widehat{\psi}_i(k,t).$$

On définit la distribution de Wigner $\mathcal{W}^\varepsilon : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par

Soit $(\widehat{\Psi}_i)_{i\in\{1,2\}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définit par

$$\forall i \in \{1,2\}, \quad (\mathcal{A} + B\mathcal{G})[\widehat{\psi}_i(k,t)] = -\mathbf{i}\, \omega_i(k)\widehat{\psi}_i(k,t).$$

On définit la distribution de Wigner $\mathcal{W}^\varepsilon : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{W}^\varepsilon(t,p,k) \quad = \quad \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^{2} \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[\widehat{\psi}_i\left(k - \frac{\varepsilon p}{2}, t\varepsilon^{-1}\right)^* \widehat{\psi}_i\left(k + \frac{\varepsilon p}{2}, t\varepsilon^{-1}\right)\right].$$

Distribution de Wigner

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Soit $(\widehat{\Psi}_i)_{i\in\{1,2\}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définit par

$$\forall i \in \{1,2\}, \quad (\mathcal{A} + B\mathcal{G})[\widehat{\psi}_i(k,t)] = -\mathbf{i}\,\omega_i(k)\widehat{\psi}_i(k,t).$$

On définit la distribution de Wigner $\mathcal{W}^\varepsilon : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{W}^\varepsilon(t,p,k) \quad = \quad \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[\widehat{\psi}_i\left(k - \frac{\varepsilon p}{2}, t\varepsilon^{-1}\right)^*\widehat{\psi}_i\left(k + \frac{\varepsilon p}{2}, t\varepsilon^{-1}\right)\right].$$

Si J est une fonction lisse sur $\mathbb{R}$ alors

$$\left\langle \mathcal{W}^\varepsilon(t), J\right\rangle = \varepsilon\sum_{x\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[e_x\left(t\varepsilon^{-1}\right)\right]J(\varepsilon x) + O_J(\varepsilon).$$

Pour comprendre le comportement macroscopique de l'énergie, nous devons étudier celui de $\mathcal{W}^\varepsilon$.

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Theorem (Basile,Olla,Komorowski, 09' Saito,Sasada,Suda, 18')

$\mathcal{W}^\varepsilon$ *converge vers* $f := (f_1, f_2)$ *où pour* $(u, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$

$$\partial_t f_i(t,u,k) + \frac{\boldsymbol{v}(k)}{2\pi}\partial_u f_i(t,u,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,u,k).$$

Échelle mésoscopique

Theorem (Basile,Olla,Komorowski, 09' Saito,Sasada,Suda, 18')

$\mathcal{W}^\varepsilon$ *converge vers* $f := (f_1, f_2)$ *où pour* $(u,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$

$$\partial_t f_i(t,u,k) + \frac{\boldsymbol{v}(k)}{2\pi}\partial_u f_i(t,u,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,u,k).$$

Échelle mésoscopique

$$\mathcal{L}_B[f_i](t,u,k) = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \theta_i^2(k) R(k,k') \theta_j^2(k') \left(f_i(t,u,k') - f_j(t,u,k) \right) dk'.$$

Theorem (Basile,Olla,Komorowski, 09' Saito,Sasada,Suda, 18')

$\mathcal{W}^\varepsilon$ converge vers $f := (f_1, f_2)$ où pour $(u,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$

$$\partial_t f_i(t,u,k) + \frac{\boldsymbol{v}(k)}{2\pi}\partial_u f_i(t,u,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,u,k).$$

Échelle mésoscopique

$$\mathcal{L}_B[f_i](t,u,k) = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \theta_i^2(k) R(k,k') \theta_j^2(k') \left(f_i(t,u,k') - f_j(t,u,k) \right) dk'.$$

Ici

$$\boldsymbol{v}(k) = \frac{4\pi \sin(\pi k)\cos(\pi k)}{\sqrt{\sin^2(\pi k) + \frac{B^2}{4}}} \quad R(k,k') = 16 \sin^2(\pi k)\sin(\pi k').$$

$$\theta_1(k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{B}{4\sqrt{\sin^2(\pi k) + \frac{B^2}{4}}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \theta_2(k) = \left(\frac{1}{2} - \frac{B}{4\sqrt{\sin^2(\pi k) + \frac{B^2}{4}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$\mathcal{L}_B$ est le générateur infinitésimal d'un processus markovien de saut.

$\mathcal{L}_B$ est le générateur infinitésimal d'un processus markovien de saut.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B[f_i](u,k,t) &= \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{T}}\theta_i^2(k)R(k,k')\theta_j^2(k')\left(f_i(t,u,k')-f_j(t,u,k)\right)dk'.\\ &= \sum_{j=1}^{2}\lambda(k,i)\int_{\mathbb{T}}P(k,i,dk',j)\left(f_i(t,u,k')-f_j(t,u,k)\right)dk'.\end{aligned}$$

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

$\mathcal{L}_B$ est le générateur infinitésimal d'un processus markovien de saut.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B[f_i](u,k,t) &= \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{T}}\theta_i^2(k)R(k,k')\theta_j^2(k')\left(f_i(t,u,k')-f_j(t,u,k)\right)dk'. \\ &= \sum_{j=1}^{2}\lambda(k,i)\int_{\mathbb{T}}P(k,i,dk',j)\left(f_i(t,u,k')-f_j(t,u,k)\right)dk'.\end{aligned}$$

Explication du processus :

Processus markoviens de sauts

$\mathcal{L}_B$ est le générateur infinitésimal d'un processus markovien de saut.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B[f_i](u,k,t) &= \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{T}}\theta_i^2(k)R(k,k')\theta_j^2(k')\left(f_i(t,u,k')-f_j(t,u,k)\right)dk'.\\ &= \sum_{j=1}^{2}\lambda(k,i)\int_{\mathbb{T}}P(k,i,dk',j)\left(f_i(t,u,k')-f_j(t,u,k)\right)dk'.\end{aligned}$$

Explication du processus :

- Si $(K(t),I(t))=(k,i)$.

$\mathcal{L}_B$ est le générateur infinitésimal d'un processus markovien de saut.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B[f_i](u,k,t) &= \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{T}}\theta_i^2(k)R(k,k')\theta_j^2(k')\left(f_i(t,u,k')-f_j(t,u,k)\right)dk'.\\ &= \sum_{j=1}^{2}\lambda(k,i)\int_{\mathbb{T}}P(k,i,dk',j)\left(f_i(t,u,k')-f_j(t,u,k)\right)dk'.\end{aligned}$$

Explication du processus :

- Si $(K(t),I(t))=(k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda(k,i)$.

$\mathcal{L}_B$ est le générateur infinitésimal d'un processus markovien de saut.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B[f_i](u,k,t) &= \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \theta_i^2(k) R(k,k') \theta_j^2(k') \left(f_i(t,u,k') - f_j(t,u,k)\right) dk'. \\ &= \sum_{j=1}^{2} \lambda(k,i) \int_{\mathbb{T}} P(k,i,dk',j) \left(f_i(t,u,k') - f_j(t,u,k)\right) dk'.\end{aligned}$$

Explication du processus :

- Si $(K(t), I(t)) = (k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda(k,i)$.
- Le processus passe de (k,i) à (k',j) avec probabilité $P(k,i,k',j)$.

Processus markoviens de sauts

$\mathcal{L}_B$ est le générateur infinitésimal d'un processus markovien de saut.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B[f_i](u,k,t) &= \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \theta_i^2(k) R(k,k') \theta_j^2(k') \left(f_i(t,u,k') - f_j(t,u,k)\right) dk'. \\ &= \sum_{j=1}^{2} \lambda(k,i) \int_{\mathbb{T}} P(k,i,dk',j) \left(f_i(t,u,k') - f_j(t,u,k)\right) dk'.\end{aligned}$$

Explication du processus :

- Si $(K(t), I(t)) = (k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda(k,i)$.
- Le processus passe de (k,i) à (k',j) avec probabilité $P(k,i,k',j)$.

On définit

$$\forall t \geq 0, \quad Z_u(t) = u + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathbf{v}(K(s)).$$

$\mathcal{L}_B$ est le générateur infinitésimal d'un processus markovien de saut.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_B[f_i](u,k,t) &= \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{T}}\theta_i^2(k)R(k,k')\theta_j^2(k')\left(f_i(t,u,k')-f_j(t,u,k)\right)dk'.\\ &= \sum_{j=1}^{2}\lambda(k,i)\int_{\mathbb{T}}P(k,i,dk',j)\left(f_i(t,u,k')-f_j(t,u,k)\right)dk'.\end{aligned}$$

Explication du processus :

- Si $(K(t),I(t))=(k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda(k,i)$.
- Le processus passe de (k,i) à (k',j) avec probabilité $P(k,i,k',j)$.

On définit

$$\forall t\geq 0,\quad Z_u(t)=u+\frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathbf{v}(K(s)).$$

Alors

$$f_i(t,u,k)=\mathbb{E}_{(k,i)}\left[f^0_{I(t)}(Z_u(t),K(t))\right].$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t.

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t. Alors :

$$Z_u(t) = u + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \lambda(K_n, I_n)\mathbf{v}(K_n).$$

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t. Alors :

$$Z_u(t) = u + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \lambda(K_n, I_n)\mathbf{v}(K_n).$$

Soit π la mesure invariante de la chaîne de Markov $(K_n, I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Étude d'une marche aléatoire

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t. Alors :

$$Z_u(t) = u + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \lambda(K_n, I_n)\mathbf{v}(K_n).$$

Soit π la mesure invariante de la chaîne de Markov $(K_n, I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors pour r suffisamment grand

$$\pi\{(k,i)|, \quad \lambda(k,i)\mathbf{v}(k) > r\} \sim \begin{cases} r^{-\frac{3}{2}} & \text{si} \quad B = 0. \\ r^{-\frac{5}{3}} & \text{si} \quad B \neq 0. \end{cases}$$

Étude d'une marche aléatoire

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t. Alors :

$$Z_u(t) = u + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \lambda(K_n, I_n)\mathbf{v}(K_n).$$

Soit π la mesure invariante de la chaîne de Markov $(K_n, I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors pour r suffisamment grand

$$\pi\{(k,i)|, \quad \lambda(k,i)\mathbf{v}(k) > r\} \sim \begin{cases} r^{-\frac{3}{2}} & \text{si} \quad B = 0. \\ r^{-\frac{5}{3}} & \text{si} \quad B \neq 0. \end{cases}$$

Alors Z_u converge vers un processus de Lévy.

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Soit $\alpha \in \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{3} \right\}$

Limite hydrodynamique

Soit $\alpha \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right\}$ et ρ la solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,u) = -D(-\Delta_u)^{\frac{\alpha}{2}} \rho(t,u) & \boxed{\text{Échelle macroscopique}} \\ \rho(0,u) = \rho^0(u). \end{cases} \tag{1}$$

Soit $\alpha \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right\}$ et ρ la solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,u) = -D(-\Delta_u)^{\frac{\alpha}{2}} \rho(t,u) & \boxed{\text{Échelle macroscopique}} \\ \rho(0,u) = \rho^0(u). \end{cases} \tag{1}$$

Alors on a :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \left| f_i\left(Nt, uN^{-\frac{1}{\alpha}}, k\right) - \frac{1}{2}\rho(t,u)\right|^2 dk = 0,$$

Limite hydrodynamique

Soit $\alpha \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right\}$ et ρ la solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,u) = -D(-\Delta_u)^{\frac{\alpha}{2}} \rho(t,u) \\ \rho(0,u) = \rho^0(u). \end{cases} \qquad (1)$$

Échelle macroscopique

Alors on a :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \left| f_i\left(Nt, uN^{-\frac{1}{\alpha}}, k\right) - \frac{1}{2}\rho(t,u)\right|^2 dk = 0,$$

Bilan :

L'hypothèse naturelle sur notre système était :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{x\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon x)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[e_x(0)\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u) J(u) du.$$

Limite hydrodynamique

Soit $\alpha \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right\}$ et ρ la solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,u) = -D(-\Delta_u)^{\frac{\alpha}{2}} \rho(t,u) \\ \rho(0,u) = \rho^0(u). \end{cases} \quad \boxed{\text{Échelle macroscopique}} \tag{1}$$

Alors on a :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \left| f_i\left(Nt, uN^{-\frac{1}{\alpha}}, k\right) - \frac{1}{2}\rho(t,u)\right|^2 dk = 0,$$

Bilan :

L'hypothèse naturelle sur notre système était :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{x\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon x)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[e_x(0)\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u)J(u)du.$$

La question était :

Peut-on obtenir une équation pour $\mathcal{W}(t,u)$?

Soit $\alpha \in \left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{3}\right\}$ et ρ la solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,u) = -D(-\Delta_u)^{\frac{\alpha}{2}} \rho(t,u) & \text{Échelle macroscopique} \\ \rho(0,u) = \rho^0(u). \end{cases} \tag{1}$$

Alors on a :

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \left| f_i\left(Nt, uN^{-\frac{1}{\alpha}}, k\right) - \frac{1}{2}\rho(t,u)\right|^2 dk = 0,$$

Bilan :

L'hypothèse naturelle sur notre système était :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{x\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon x)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[e_x(0)\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u)J(u)du.$$

La question était :

Peut-on obtenir une équation pour $\mathcal{W}(t,u)$?

OUI et l'équation est

$$\partial_t \mathcal{W}(t,u) = -D(-\Delta_u)^{\frac{\alpha}{2}} \mathcal{W}(t,u).$$