Étude d'une transition dans la superdiffusion d'énergie d'une chaîne d'oscillateurs harmoniques bruités

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Séminaire Landau
24/11/2021

Échelle microscopique

Le système de particules est régi par les lois de Newton

Prélude sur la physique statistique

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Échelle microscopique

Le système de particules est régi par les lois de Newton

$\xrightarrow{\text{Limite cinétique}}$

Échelle mésoscopique

Équation de Boltzmann

$\partial_t f + v\nabla_x f = Q(f)$

Prélude sur la physique statistique

Échelle microscopique

Le système de particules est régi par les lois de Newton

Limite cinétique

Échelle mésoscopique

Équation de Boltzmann

$$\partial_t f + v\nabla_x f = Q(f)$$

Limite Hydro

Échelle macroscopique

Équation de la chaleur

$$\partial_t \rho = \Delta_x \rho$$

Prélude sur la physique statistique

Échelle microscopique

Le système de particules est régi par les lois de Newton

Limite cinétique

Échelle mésoscopique

Équation de Boltzmann

$\partial_t f + v\nabla_x f = Q(f)$

Limite Hydrodynamique

Limite Hydro

Échelle macroscopique

Équation de la chaleur

$\partial_t \rho = \Delta_x \rho$

Chaîne harmonique

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$q(t,y) := (q_1(t,y), q_2(t,y))$: position de la particule y au temps t.
$p(t,y) := (p_1(t,y), p_2(t,y))$: vitesse de la particule y au temps t.

Chaîne harmonique

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$q(t,y) := (q_1(t,y), q_2(t,y))$: position de la particule y au temps t.
$p(t,y) := (p_1(t,y), p_2(t,y))$: vitesse de la particule y au temps t.

Échelle microscopique

Chaîne harmonique

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$q(t,y) := (q_1(t,y), q_2(t,y))$: position de la particule y au temps t.
$p(t,y) := (p_1(t,y), p_2(t,y))$: vitesse de la particule y au temps t.

Échelle microscopique

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_i(t,y) &= p_i(t,y) \\ \frac{d}{dt} p_i(t,y) &= q_i(t,y+1) + q_i(t,y-1) - 2q_i(t,y) \end{aligned}$$

Chaîne harmonique

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$q(t,y) := (q_1(t,y), q_2(t,y))$: position de la particule y au temps t.
$p(t,y) := (p_1(t,y), p_2(t,y))$: vitesse de la particule y au temps t.

Échelle microscopique

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} q_i(t,y) &= p_i(t,y) \\
\frac{d}{dt} p_i(t,y) &= q_i(t,y+1) + q_i(t,y-1) - 2q_i(t,y) \\
&+ B\left(\delta_{i,1} p_2(t,y) - \delta_{i,2} p_1(t,y)\right)
\end{aligned}
$$

Chaîne harmonique

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$q(t,y) := (q_1(t,y), q_2(t,y))$: position de la particule y au temps t.
$p(t,y) := (p_1(t,y), p_2(t,y))$: vitesse de la particule y au temps t.

Échelle microscopique

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} q_i(t,y) &= p_i(t,y) \\
\frac{d}{dt} p_i(t,y) &= q_i(t,y+1) + q_i(t,y-1) - 2q_i(t,y) \\
&+ B(\delta_{i,1} p_2(t,y) - \delta_{i,2} p_1(t,y)) + \varepsilon \text{ noise}.
\end{aligned}
$$

Chaîne harmonique

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$q(t,y) := (q_1(t,y), q_2(t,y))$: position de la particule y au temps t.
$p(t,y) := (p_1(t,y), p_2(t,y))$: vitesse de la particule y au temps t.

Échelle microscopique

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} q_i(t,y) &= p_i(t,y) \\
\frac{d}{dt} p_i(t,y) &= q_i(t,y+1) + q_i(t,y-1) - 2q_i(t,y) \\
&+ B(\delta_{i,1} p_2(t,y) - \delta_{i,2} p_1(t,y)) + \varepsilon \text{ noise}.
\end{aligned}
$$

Générateur infinitésimal de la dynamique

$$\mathcal{A} + B\mathcal{G} + \varepsilon \mathcal{S}.$$

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$E(t) \quad := \quad \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |p(t,y)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |q(t,y+1) - q(t,y-1)|^2$$

Objectif de l'étude

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Energie au temps t :

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |p(t,y)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |q(t,y+1)-q(t,y-1)|^2 \\ &:= \sum_{y\in\mathbb{Z}} e_y(t). \end{aligned}$$

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |p(t,y)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |q(t,y+1)-q(t,y-1)|^2 \\ &:= \sum_{y\in\mathbb{Z}} e_y(t). \end{aligned}$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment.

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$E(t) := \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |p(t,y)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |q(t,y+1)-q(t,y-1)|^2$$
$$:= \sum_{y\in\mathbb{Z}} e_y(t).$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment. Soit μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |p(t,y)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |q(t,y+1)-q(t,y-1)|^2 \\ &:= \sum_{y\in\mathbb{Z}} e_y(t). \end{aligned}$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment. Soit μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Hypothèse naturelle sur le système :

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$E(t) := \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |p(t,y)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |q(t,y+1)-q(t,y-1)|^2$$
$$:= \sum_{y\in\mathbb{Z}} e_y(t).$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment. Soit μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Hypothèse naturelle sur le système :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{y\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon y)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[e_y(0)\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u)J(u)du.$$

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$E(t) := \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |p(t,y)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |q(t,y+1)-q(t,y-1)|^2$$
$$:= \sum_{y\in\mathbb{Z}} e_y(t).$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment. Soit μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Hypothèse naturelle sur le système :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{y\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon y)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}[e_y(0)] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u)J(u)du.$$

Peut-on avoir une équation macroscopique pour $\mathcal{W}(t,u)$?

Distribution de Wigner

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Soit $(\widehat{\Psi}_i)_{i\in\{1,2\}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définit par

$$\forall i \in \{1,2\}, \quad (\mathcal{A} + B\mathcal{G})[\widehat{\psi}_i(t,k)] = -\mathbf{i}\,\omega_i(k)\widehat{\psi}_i(t,k).$$

Distribution de Wigner

Soit $(\widehat{\Psi}_i)_{i\in\{1,2\}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définit par

$$\forall i \in \{1,2\}, \quad (\mathcal{A}+B\mathcal{G})[\widehat{\psi}_i(t,k)] = -\mathbf{i}\,\omega_i(k)\widehat{\psi}_i(t,k).$$

On définit la distribution de Wigner $\mathcal{W}^\varepsilon : [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ par :

Distribution de Wigner

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Soit $(\widehat{\Psi}_i)_{i\in\{1,2\}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définit par

$$\forall i \in \{1,2\}, \quad (\mathcal{A} + B\mathcal{G})[\widehat{\psi}_i(t,k)] = -\mathbf{i}\,\omega_i(k)\widehat{\psi}_i(t,k).$$

On définit la distribution de Wigner $\mathcal{W}^{\varepsilon} : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{W}^{\varepsilon}(t,p,k) \quad = \quad \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\mathbb{E}_{\mu^{\varepsilon}}\left[\widehat{\psi}_i\left(t\varepsilon^{-1}, k - \frac{\varepsilon p}{2}\right)^{*}\widehat{\psi}_i\left(t\varepsilon^{-1}, k + \frac{\varepsilon p}{2}\right)\right].$$

Soit $(\widehat{\Psi}_i)_{i\in\{1,2\}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définit par

$$\forall i \in \{1,2\}, \quad (\mathcal{A} + B\mathcal{G})[\widehat{\psi}_i(t,k)] = -\mathbf{i}\,\omega_i(k)\widehat{\psi}_i(t,k).$$

On définit la distribution de Wigner $\mathcal{W}^\varepsilon : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{W}^\varepsilon(t,p,k) = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2} \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[\widehat{\psi}_i\left(t\varepsilon^{-1}, k - \tfrac{\varepsilon p}{2}\right)^* \widehat{\psi}_i\left(t\varepsilon^{-1}, k + \tfrac{\varepsilon p}{2}\right)\right].$$

Si J est une fonction lisse sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\left\langle \mathcal{W}^\varepsilon(t), J \right\rangle = \varepsilon \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[e_y\left(t\varepsilon^{-1}\right)\right] J(\varepsilon y) + O_J(\varepsilon).$$

Pour comprendre le comportement macroscopique de l'énergie, nous devons étudier celui de $\mathcal{W}^\varepsilon$.

Équation de Boltzmann linéaire

Théorème (Basile,Olla,Komorowski, 09' Saito,Sasada,Suda, 18')

$\mathcal{W}^{\varepsilon}$ *converge vers* $f := (f_1, f_2)$ *où pour* $(x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\boldsymbol{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k).$$

Échelle mésoscopique

Théorème (Basile,Olla,Komorowski, 09' Saito,Sasada,Suda, 18')

$\mathcal{W}^\varepsilon$ converge vers $f := (f_1, f_2)$ où pour $(x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{v_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k). \quad \boxed{\textit{Échelle mésoscopique}}$$

$$\mathcal{L}_B[f_i](t,x,k) = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \theta_i^2(k) R(k,k') \theta_j^2(k') \left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k)\right) dk'.$$

Théorème (Basile,Olla,Komorowski, 09' Saito,Sasada,Suda, 18')

$\mathcal{W}^\varepsilon$ converge vers $f := (f_1, f_2)$ où pour $(x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\boldsymbol{v}_B(k)}{2\pi} \partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k).$$

Échelle mésoscopique

$$\mathcal{L}_B[f_i](t,x,k) = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \theta_i^2(k) R(k,k') \theta_j^2(k') \left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k) \right) dk'.$$

Ici :

$$\boldsymbol{v}_B(k) = \frac{4\pi \sin(\pi k)\cos(\pi k)}{\sqrt{\sin^2(\pi k) + \frac{B^2}{4}}} \qquad R(k,k') = 16 \sin^2(\pi k) \sin^2(\pi k').$$

$$\theta_1(k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{B}{4\sqrt{\sin^2(\pi k) + \frac{B^2}{4}}} \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \theta_2(k) = \left(\frac{1}{2} - \frac{B}{4\sqrt{\sin^2(\pi k) + \frac{B^2}{4}}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **i.i.d** vérifiant :

- $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = -1) = \frac{1}{2}$.
- $X_0 \in \mathbb{L}^2$.

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **i.i.d** vérifiant :

- $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = -1) = \frac{1}{2}$.
- $X_0 \in \mathbb{L}^2$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on définit :

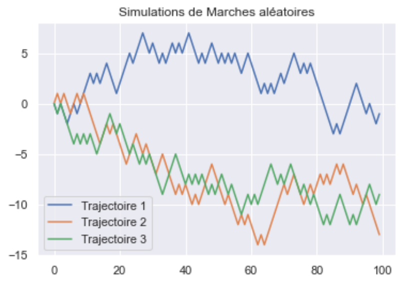
$$S_N := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N^2} X_n$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **i.i.d** vérifiant :

- $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = -1) = \frac{1}{2}$.
- $X_0 \in \mathbb{L}^2$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$S_N := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N^2} X_n$$



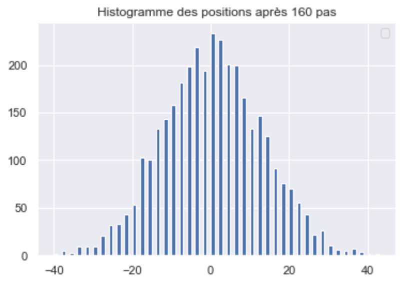
GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **i.i.d** vérifiant :

- $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = -1) = \frac{1}{2}$.
- $X_0 \in \mathbb{L}^2$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$S_N := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N^2} X_n$$

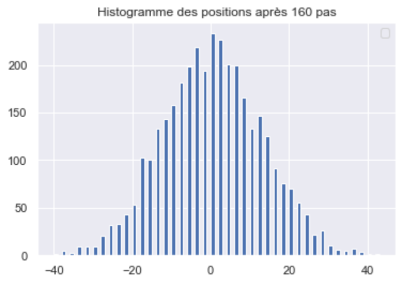


Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires **i.i.d** vérifiant :

- $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = -1) = \frac{1}{2}$.
- $X_0 \in \mathbb{L}^2$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$S_N := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N^2} X_n \to \mathcal{N}(0,1) \quad \text{quand } N \text{ tend vers l'infini.}$$



Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Soit $t \geq 0$, on définit :

$$\mathcal{B}^N(t) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor N^2 t \rfloor} X_n.$$

Mouvement Brownien

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Soit $t \geq 0$, on définit :

$$\mathcal{B}^N(t) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor N^2 t \rfloor} X_n.$$

- $\mathcal{B}_1^N \to \mathcal{N}(0,1)$ par le résultat précédent.

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Soit $t \geq 0$, on définit :

$$\mathcal{B}^N(t) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{\lfloor N^2 t \rfloor} X_n.$$

- $\mathcal{B}_1^N \to \mathcal{N}(0,1)$ par le résultat précédent.
- $\mathcal{B}^N(\cdot) \to \mathcal{B}(\cdot)$ où $\mathcal{B}(\cdot)$ est un mouvement Brownien sur $\mathbb{R}$.

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{B}_x(\cdot)$ le mouvement Brownien partant de x.

Lien avec l'équation de la chaleur

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{B}_x(\cdot)$ le mouvement Brownien partant de x. Alors pour tout $t > 0$, $\mathcal{B}_x(t)$ a pour densité :

$$\rho_x(t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right).$$

Lien avec l'équation de la chaleur

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{B}_x(\cdot)$ le mouvement Brownien partant de x. Alors pour tout $t > 0$, $\mathcal{B}_x(t)$ a pour densité :

$$\rho_x(t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right).$$

Ainsi pour toute partie A de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(B_x(t) \in A) = \int_A \rho_x(t,y)dy.$$

Lien avec l'équation de la chaleur

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{B}_x(\cdot)$ le mouvement Brownien partant de x. Alors pour tout $t > 0$, $\mathcal{B}_x(t)$ a pour densité :

$$\rho_x(t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right).$$

Ainsi pour toute partie A de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(B_x(t) \in A) = \int_A \rho_x(t,y)dy.$$

Soit u_0 une fonction lisse on définit :

$$u(t,x) \quad := \quad \mathbb{E}[u_0(B_x(t))]$$

Lien avec l'équation de la chaleur

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{B}_x(\cdot)$ le mouvement Brownien partant de x. Alors pour tout $t > 0$, $\mathcal{B}_x(t)$ a pour densité :

$$\rho_x(t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right).$$

Ainsi pour toute partie A de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(B_x(t) \in A) = \int_A \rho_x(t,y)dy.$$

Soit u_0 une fonction lisse on définit :

$$\begin{aligned} u(t,x) &:= \mathbb{E}[u_0(B_x(t))] \\ &= \int_{\mathbb{R}} u_0(y)\rho_x(t,y)dy \end{aligned}$$

Lien avec l'équation de la chaleur

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{B}_x(\cdot)$ le mouvement Brownien partant de x. Alors pour tout $t > 0$, $\mathcal{B}_x(t)$ a pour densité :

$$\rho_x(t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right).$$

Ainsi pour toute partie A de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(B_x(t) \in A) = \int_A \rho_x(t,y)dy.$$

Soit u_0 une fonction lisse on définit :

$$\begin{aligned} u(t,x) &:= \mathbb{E}[u_0(B_x(t))] \\ &= \int_{\mathbb{R}} u_0(y)\rho_x(t,y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right) dy. \end{aligned}$$

Lien avec l'équation de la chaleur

Soit $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{B}_x(\cdot)$ le mouvement Brownien partant de x. Alors pour tout $t > 0$, $\mathcal{B}_x(t)$ a pour densité :

$$\rho_x(t,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right).$$

Ainsi pour toute partie A de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{P}(B_x(t) \in A) = \int_A \rho_x(t,y)dy.$$

Soit u_0 une fonction lisse on définit :

$$\begin{aligned} u(t,x) &:= \mathbb{E}[u_0(B_x(t))] \\ &= \int_{\mathbb{R}} u_0(y)\rho_x(t,y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} u_0(y) \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right) dy. \end{aligned}$$

On peut montrer que u est solution de :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \frac{1}{2}\Delta_x[u](t,x), \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Rappel :

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Rappel : $\mathscr{W}^{\varepsilon} \to f := (f_1, f_2)$ où pour $(x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$:

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi} \partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

Retour sur l'équation de Boltzmann linéaire

Rappel : $\mathcal{W}^\varepsilon \to f := (f_1, f_2)$ où pour $(x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$:

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi} \partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) \quad = \quad \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i) \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j) \left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k) \right).$$

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

Processus markoviens de sauts

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi} \partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i) \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j) \left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k) \right).$$

Processus markoviens de sauts

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i) \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j)\left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k)\right).$$

On définit un processus stochastique $(K(\cdot), I(\cdot))$ par :

Processus markoviens de sauts

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i) \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j) \left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k) \right).$$

On définit un processus stochastique $(K(\cdot), I(\cdot))$ par :

- $(K(0), I(0)) = (k,i)$.

Processus markoviens de sauts

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i) \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j) \left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k)\right).$$

On définit un processus stochastique $(K(\cdot), I(\cdot))$ **par :**

- $(K(0), I(0)) = (k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda_B(k,i)$.

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i) \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j)\left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k)\right).$$

On définit un processus stochastique $(K(\cdot), I(\cdot))$ **par :**

- $(K(0), I(0)) = (k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda_B(k,i)$.
- Le processus passe de (k,i) à (k',j) avec probabilité $P_B(k,i,k',j)$.

Processus markoviens de sauts

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i) \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j)\left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k)\right).$$

On définit un processus stochastique $(K(\cdot), I(\cdot))$ par :

- $(K(0), I(0)) = (k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda_B(k,i)$.
- Le processus passe de (k,i) à (k',j) avec probabilité $P_B(k,i,k',j)$.

On définit :

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\,ds.$$

Processus markoviens de sauts

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i) \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j)\left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k)\right).$$

On définit un processus stochastique $(K(\cdot), I(\cdot))$ **par :**

- $(K(0), I(0)) = (k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda_B(k,i)$.
- Le processus passe de (k,i) à (k',j) avec probabilité $P_B(k,i,k',j)$.

On définit :

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\,ds.$$

Alors :

$$f_i(t,x,k) = \mathbb{E}\left[f^0_{I_i(t)}(Z_x(t), K_k(t))\right] \quad \rightsquigarrow u(t,x) = \mathbb{E}\left[u_0\left(B_x(t)\right)\right].$$

Finalement c'est encore une histoire de marche aléatoire

$$f_i(t,x,k) = \mathbb{E}\left[f^0_{I_i(t)}(Z_x(t), K_k(t))\right].$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$$f_i(t,x,k) = \mathbb{E}\left[f^0_{I_i(t)}(Z_x(t),K_k(t))\right].$$

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\,ds.$$

Finalement c'est encore une histoire de marche aléatoire

$$f_i(t,x,k) = \mathbb{E}\left[f^0_{I_i(t)}(Z_x(t), K_k(t))\right].$$

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\,ds.$$

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t.

Finalement c'est encore une histoire de marche aléatoire

$$f_i(t,x,k) = \mathbb{E}\left[f^0_{I_i(t)}(Z_x(t),K_k(t))\right].$$

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\,ds.$$

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t. Alors :

$$Z_x(t) = x + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \lambda_B(K_n, I_n)\mathbf{v}_B(K_n) \quad \rightsquigarrow S_N(t) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\lfloor N^2 t\rfloor} X_n.$$

Finalement c'est encore une histoire de marche aléatoire

$$f_i(t,x,k) = \mathbb{E}\left[f^0_{I_i(t)}(Z_x(t),K_k(t))\right].$$

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\,ds.$$

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t. Alors :

$$Z_x(t) = x + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \lambda_B(K_n, I_n)\mathbf{v}_B(K_n) \quad \rightsquigarrow S_N(t) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\lfloor N^2 t \rfloor} X_n.$$

On définit α_B par :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \quad \text{si} \quad B \neq 0 \quad \alpha_B = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad B = 0.$$

Finalement c'est encore une histoire de marche aléatoire

$$f_i(t,x,k) = \mathbb{E}\left[f^0_{I_i(t)}(Z_x(t),K_k(t))\right].$$

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\,ds.$$

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t. Alors :

$$Z_x(t) = x + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \lambda_B(K_n,I_n)\mathbf{v}_B(K_n) \quad \rightsquigarrow S_N(t) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{\lfloor N^2 t\rfloor} X_n.$$

On définit α_B par :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \quad \text{si} \quad B \neq 0 \quad \alpha_B = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad B = 0.$$

Alors :

$$N^{-1}Z_{Nx}(N^{\alpha_B}t) = x + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{\lfloor N^{\alpha_B}t\rfloor} \lambda_B(K_n,I_n)\mathbf{v}_B(K_n) \to L_{x,B}(t),$$

où $L_{x,B}(\cdot)$ est un processus de Lévy.

On rappelle que :

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k).$$

Limite hydrodynamique

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

On rappelle que :

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k).$$

La solution est donnée par :

Limite hydrodynamique

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

On rappelle que :

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi} \partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k).$$

La solution est donnée par :

$$f_i(t,x,k) = \mathbb{E}\left[f^0_{I_i(t)}(Z_x(t), K_k(t)) \right].$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

On rappelle que :

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi} \partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k).$$

La solution est donnée par :

$$f_i(t,x,k) = \mathbb{E}\left[f^0_{I_i(t)}(Z_x(t), K_k(t)) \right].$$

Soitρ la solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ de :

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) = -D(-\Delta_x)^{\frac{\alpha_B}{2}} \rho(t,x), \\ \rho(0,x) = \rho^0(x). \end{cases} \qquad \boxed{\text{Échelle macroscopique}} \qquad (1)$$

Limite hydrodynamique

On rappelle que :

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k).$$

La solution est donnée par :

$$f_i(t,x,k) = \mathbb{E}\left[f^0_{I_i(t)}(Z_x(t), K_k(t))\right].$$

Soitρ la solution sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ de :

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) = -D(-\Delta_x)^{\frac{\alpha_B}{2}}\rho(t,x), \\ \rho(0,x) = \rho^0(x). \end{cases} \quad \text{Échelle macroscopique} \qquad (1)$$

Théorème (Jara,Olla,Komorowski, 10' Saito,Sasada,Suda, 18')

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{2}\int_{\mathbb{T}}\left|f_i\left(N^{\alpha_B}t, xN, k\right) - \frac{1}{2}\rho(t,x)\right|^2 dk = 0.$$

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

L'hypothèse naturelle sur notre système était :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{y\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon y)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[e_y(0)\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u)J(u)du.$$

Bilan provisoire et nouvelle question

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

L'hypothèse naturelle sur notre système était :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum_{y \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon y) \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon} \left[e_y(0) \right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u) J(u) du.$$

La question était :

Peut-on obtenir une équation pour $\mathcal{W}(t,u)$?

L'hypothèse naturelle sur notre système était :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{y\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon y)\mathbb{E}_{\mu^{\varepsilon}}\left[e_y(0)\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u)J(u)du.$$

La question était :

Peut-on obtenir une équation pour $\mathcal{W}(t,u)$?

OUI et l'équation est :

$$\partial_t \mathcal{W}(t,x) = -D(-\Delta_x)^{\frac{\alpha_B}{2}}\mathcal{W}(t,x),$$

où :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \quad \text{si} \quad B \neq 0 \quad et \quad \alpha_B = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad B = 0.$$

Bilan provisoire et nouvelle question

L'hypothèse naturelle sur notre système était :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum_{y \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon y) \mathbb{E}_{\mu^{\varepsilon}} [e_y(0)] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u) J(u) du.$$

La question était :

Peut-on obtenir une équation pour $\mathcal{W}(t,u)$?

OUI et l'équation est :

$$\partial_t \mathcal{W}(t,x) = -D(-\Delta_x)^{\frac{\alpha_B}{2}} \mathcal{W}(t,x),$$

où :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \quad \text{si} \quad B \neq 0 \quad et \quad \alpha_B = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad B = 0.$$

- Limite en une étape pour $B = 0$ **[Jara,Olla,Komorowski '15]** .

Bilan provisoire et nouvelle question

L'hypothèse naturelle sur notre système était :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum_{y \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon y) \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon} [e_y(0)] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u) J(u) du.$$

La question était :

Peut-on obtenir une équation pour $\mathcal{W}(t,u)$?

OUI et l'équation est :

$$\partial_t \mathcal{W}(t,x) = -D(-\Delta_x)^{\frac{\alpha_B}{2}} \mathcal{W}(t,x),$$

où :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \quad \text{si} \quad B \neq 0 \quad \textit{et} \quad \alpha_B = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad B = 0.$$

- Limite en une étape pour $B = 0$ **[Jara,Olla,Komorowski '15]** .

Que se passe-t-il si on pose $B_N := BN^{-\delta}$ avec $B \neq 0$ et $\delta > 0$?

Un processus d'interpolation

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Soit $B_N := BN^{-\delta}$ avec $B \neq 0$ et $\delta > 0$.

Un processus d'interpolation

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Soit $B_N := BN^{-\delta}$ avec $B \neq 0$ et $\delta > 0$.

$$\partial_t f_i^N(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_{B_N}(k)}{2\pi}\partial_x f_i^N(t,x,k) = \mathcal{L}_{B_N}[f_i^N](t,x,k).$$

Un processus d'interpolation

Soit $B_N := BN^{-\delta}$ avec $B \neq 0$ et $\delta > 0$.

$$\partial_t f_i^N(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_{B_N}(k)}{2\pi} \partial_x f_i^N(t,x,k) = \mathcal{L}_{B_N}[f_i^N](t,x,k).$$

La solution est donnée par :

$$f_i^N(t,x,k) = \mathbb{E}\left[f^0_{I_i^N(t)}(Z_x^N(t), K_k^N(t)) \right].$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Soit $B_N := BN^{-\delta}$ avec $B \neq 0$ et $\delta > 0$.

$$\partial_t f_i^N(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_{B_N}(k)}{2\pi}\partial_x f_i^N(t,x,k) = \mathcal{L}_{B_N}[f_i^N](t,x,k).$$

La solution est donnée par :

$$f_i^N(t,x,k) = \mathbb{E}\left[f^0_{I_i^N(t)}(Z_x^N(t), K_k^N(t))\right].$$

On définit l'opérateur $\mathcal{D}_\delta$ par :

$$\mathcal{D}_\delta[\psi](y) = \begin{cases} -(-\Delta_x)^{\frac{3}{4}}[\psi](y) & \text{si} \quad \delta > \frac{1}{2}, \\ \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\psi](\xi)\Phi_B(\xi)\exp(2\mathbf{i}y\xi)\, d\xi & \text{si} \quad \delta = \frac{1}{2}, \\ -(-\Delta_x)^{\frac{5}{6}}[\psi](y) & \text{si} \quad \delta < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Un processus d'interpolation

Soit $B_N := BN^{-\delta}$ avec $B \neq 0$ et $\delta > 0$.

$$\partial_t f_i^N(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_{B_N}(k)}{2\pi}\partial_x f_i^N(t,x,k) = \mathcal{L}_{B_N}[f_i^N](t,x,k).$$

La solution est donnée par :

$$f_i^N(t,x,k) = \mathbb{E}\left[f^0_{I_i^N(t)}(Z_x^N(t), K_k^N(t))\right].$$

On définit l'opérateur $\mathcal{D}_\delta$ par :

$$\mathcal{D}_\delta[\psi](y) = \begin{cases} -(-\Delta_x)^{\frac{3}{4}}[\psi](y) & \text{si} \quad \delta > \frac{1}{2}, \\ \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\psi](\xi)\Phi_B(\xi)\exp(2\mathbf{i}y\xi)\,d\xi & \text{si} \quad \delta = \frac{1}{2}, \\ -(-\Delta_x)^{\frac{5}{6}}[\psi](y) & \text{si} \quad \delta < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Soit ρ la solution sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ de l'EDP :

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) = \mathcal{D}_\delta[\rho](t,x) \\ \rho(0,x) = \rho^0(x). \end{cases}$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

On définit :

$$\alpha_\delta = \frac{5-\delta}{3} \quad \text{si} \quad \delta < \frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad \alpha_\delta = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad \delta \geq \frac{1}{2}.$$

Une EDP d'interpolation

On définit :

$$\alpha_\delta = \frac{5-\delta}{3} \quad \text{si} \quad \delta < \frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad \alpha_\delta = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad \delta \geq \frac{1}{2}.$$

Théorème (Cane '21)

$$\forall t \in [0,T], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \left| f_i^N\left(N^{\alpha_\delta} t, Nx, k\right) - \rho(t,x) \right|^2 dk = 0.$$