Étude d'une transition dans la superdiffusion d'énergie d'une chaîne d'oscillateurs harmoniques bruités

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Séminaire Gaussbusters
23/11/2021

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Échelle microscopique

Le système de particules est régi par les lois de Newton

Prélude sur la physique statistique

Échelle microscopique

Le système de particules est régi par les lois de Newton

Limite cinétique $\longrightarrow$

Échelle mésoscopique

Équation de Boltzmann

$\partial_t f + v\nabla_x f = Q(f)$

Prélude sur la physique statistique

Échelle microscopique

Le système de particules est régi par les lois de Newton

Limite cinétique

Échelle mésoscopique

Équation de Boltzmann

$$\partial_t f + v \nabla_x f = Q(f)$$

Limite Hydro

Échelle macroscopique

Équation de la chaleur

$$\partial_t \rho = \Delta_x \rho$$

Prélude sur la physique statistique

Échelle microscopique

Le système de particules est régi par les lois de Newton

Limite cinétique

Échelle mésoscopique

Équation de Boltzmann

$$\partial_t f + v\nabla_x f = Q(f)$$

Limite Hydrodynamique

Limite Hydro

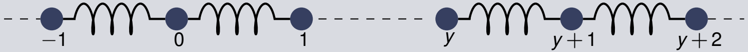
Échelle macroscopique

Équation de la chaleur

$$\partial_t \rho = \Delta_x \rho$$

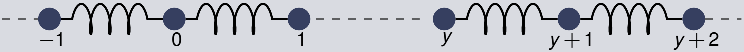
Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Chaîne harmonique



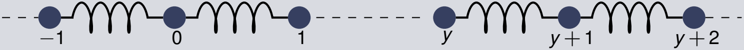
Chaîne harmonique

Gaëtan Cane
LJAD, UCA



$q(t,y) := (q_1(t,y), q_2(t,y))$: position de la particule y au temps t.
$p(t,y) := (p_1(t,y), p_2(t,y))$: vitesse de la particule y au temps t.

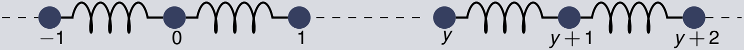
Chaîne harmonique



$q(t,y) := (q_1(t,y), q_2(t,y))$: position de la particule y au temps t.
$p(t,y) := (p_1(t,y), p_2(t,y))$: vitesse de la particule y au temps t.

Échelle microscopique

Chaîne harmonique



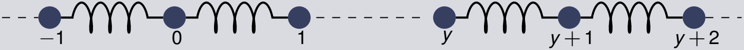
$q(t,y) := (q_1(t,y), q_2(t,y))$: position de la particule y au temps t.
$p(t,y) := (p_1(t,y), p_2(t,y))$: vitesse de la particule y au temps t.

Échelle microscopique

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} q_i(t,y) &= p_i(t,y) \\
\frac{d}{dt} p_i(t,y) &= q_i(t,y+1) + q_i(t,y-1) - 2q_i(t,y)
\end{aligned}
$$

Chaîne harmonique

GAËTAN CANE
LJAD, UCA



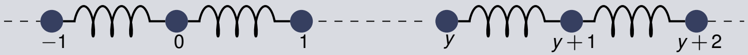
$q(t,y) := (q_1(t,y), q_2(t,y))$: position de la particule y au temps t.
$p(t,y) := (p_1(t,y), p_2(t,y))$: vitesse de la particule y au temps t.

Échelle microscopique

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} q_i(t,y) &= p_i(t,y) \\
\frac{d}{dt} p_i(t,y) &= q_i(t,y+1) + q_i(t,y-1) - 2q_i(t,y) \\
&+ B(\delta_{i,1} p_2(t,y) - \delta_{i,2} p_1(t,y))
\end{aligned}$$

Chaîne harmonique

Gaëtan Cane
LJAD, UCA



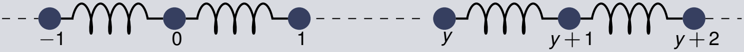
$q(t,y) := (q_1(t,y), q_2(t,y))$: position de la particule y au temps t.
$p(t,y) := (p_1(t,y), p_2(t,y))$: vitesse de la particule y au temps t.

Échelle microscopique

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} q_i(t,y) &= p_i(t,y) \\
\frac{d}{dt} p_i(t,y) &= q_i(t,y+1) + q_i(t,y-1) - 2q_i(t,y) \\
&+ B\left(\delta_{i,1} p_2(t,y) - \delta_{i,2} p_1(t,y)\right) + \varepsilon \text{ noise}.
\end{aligned}
$$

Chaîne harmonique

Gaëtan Cane
LJAD, UCA



$q(t,y) := (q_1(t,y), q_2(t,y))$: position de la particule y au temps t.
$p(t,y) := (p_1(t,y), p_2(t,y))$: vitesse de la particule y au temps t.

Échelle microscopique

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} q_i(t,y) &= p_i(t,y) \\ \frac{d}{dt} p_i(t,y) &= q_i(t,y+1) + q_i(t,y-1) - 2q_i(t,y) \\ &+ B\left(\delta_{i,1} p_2(t,y) - \delta_{i,2} p_1(t,y)\right) + \varepsilon \text{ noise}. \end{aligned}$$

Générateur infinitésimal de la dynamique

$$\mathcal{A} + B\mathcal{G} + \varepsilon \mathcal{S}.$$

Gaëtan Cane
LJAD,
UCA

Energie au temps t :

$$E(t) \quad := \quad \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |p(t,y)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |q(t,y+1) - q(t,y-1)|^2$$

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |p(t,y)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |q(t,y+1) - q(t,y-1)|^2 \\ &:= \sum_{y\in\mathbb{Z}} e_y(t). \end{aligned}$$

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$E(t) := \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}}|p(t,y)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}}|q(t,y+1)-q(t,y-1)|^2$$
$$:= \sum_{y\in\mathbb{Z}} e_y(t).$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment.

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$E(t) := \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |p(t,y)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |q(t,y+1)-q(t,y-1)|^2$$
$$:= \sum_{y\in\mathbb{Z}} e_y(t).$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment. Soit μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |p(t,y)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |q(t,y+1)-q(t,y-1)|^2 \\ &:= \sum_{y\in\mathbb{Z}} e_y(t). \end{aligned}$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment. Soit μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Hypothèse naturelle sur le système :

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |p(t,y)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |q(t,y+1)-q(t,y-1)|^2 \\ &:= \sum_{y\in\mathbb{Z}} e_y(t). \end{aligned}$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment. Soit μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Hypothèse naturelle sur le système :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{y\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon y)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[e_y(0)\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u)J(u)du.$$

Objectif de l'étude

Energie au temps t :

$$\begin{aligned} E(t) &:= \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |p(t,y)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{y\in\mathbb{Z}} |q(t,y+1)-q(t,y-1)|^2 \\ &:= \sum_{y\in\mathbb{Z}} e_y(t). \end{aligned}$$

La dynamique préserve l'énergie et le moment. Soit μ^ε la distribution initiale de la dynamique.

Hypothèse naturelle sur le système :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{y\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon y)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[e_y(0)\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u)J(u)du.$$

Peut-on avoir une équation macroscopique pour $\mathcal{W}(t,u)$?

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Soit $(\widehat{\Psi}_i)_{i\in\{1,2\}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définit par :

$$\forall i \in \{1,2\}, \quad (\mathcal{A} + B\mathcal{G})[\widehat{\psi}_i(t,k)] = -\mathbf{i}\,\omega_i(k)\widehat{\psi}_i(t,k).$$

Soit $(\widehat{\Psi}_i)_{i\in\{1,2\}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définit par :

$$\forall i \in \{1,2\}, \quad (\mathcal{A} + B\mathcal{G})[\widehat{\psi}_i(t,k)] = -\mathbf{i}\,\omega_i(k)\widehat{\psi}_i(t,k).$$

On définit la distribution de Wigner $\mathcal{W}^\varepsilon : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par :

Distribution de Wigner

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Soit $(\widehat{\Psi}_i)_{i\in\{1,2\}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définit par :

$$\forall i \in \{1,2\}, \quad (\mathcal{A} + B\mathcal{G})[\widehat{\psi}_i(t,k)] = -\mathbf{i}\,\omega_i(k)\widehat{\psi}_i(t,k).$$

On définit la distribution de Wigner $\mathcal{W}^\varepsilon : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{W}^\varepsilon(t,p,k) = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2} \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[\widehat{\psi}_i\left(t\varepsilon^{-1}, k - \frac{\varepsilon p}{2}\right)^* \widehat{\psi}_i\left(t\varepsilon^{-1}, k + \frac{\varepsilon p}{2}\right)\right].$$

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Soit $(\widehat{\Psi}_i)_{i\in\{1,2\}} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ définit par :

$$\forall i \in \{1,2\}, \quad (\mathcal{A} + B\mathcal{G})[\widehat{\psi}_i(t,k)] = -\mathbf{i}\,\omega_i(k)\widehat{\psi}_i(t,k).$$

On définit la distribution de Wigner $\mathcal{W}^\varepsilon : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ par :

$$\mathcal{W}^\varepsilon(t,p,k) \quad = \quad \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2} \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[\widehat{\psi}_i\left(t\varepsilon^{-1}, k - \tfrac{\varepsilon p}{2}\right)^* \widehat{\psi}_i\left(t\varepsilon^{-1}, k + \tfrac{\varepsilon p}{2}\right)\right].$$

Si J est une fonction lisse sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\left\langle \mathcal{W}^\varepsilon(t), J\right\rangle = \varepsilon \sum_{y\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[e_y\left(t\varepsilon^{-1}\right)\right] J(\varepsilon y) + O_J(\varepsilon).$$

Pour comprendre le comportement macroscopique de l'énergie, nous devons étudier celui de $\mathcal{W}^\varepsilon$.

Équation de Boltzmann linéaire

Théorème (Basile,Olla,Komorowski, 09' Saito,Sasada,Suda, 18')

$\mathcal{W}^\varepsilon$ converge vers $f := (f_1, f_2)$ où pour $(u,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$:

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\boldsymbol{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k).$$

Échelle mésoscopique

Équation de Boltzmann linéaire

Théorème (Basile,Olla,Komorowski, 09' Saito,Sasada,Suda, 18')

$\mathcal{W}^{\varepsilon}$ converge vers $f := (f_1, f_2)$ où pour $(u,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$:

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{v_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k).$$

Échelle mésoscopique

$$\mathcal{L}_B[f_i](t,x,k) = \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \theta_i^2(k) R(k,k') \theta_j^2(k') \left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k)\right) dk'.$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Théorème (Basile,Olla,Komorowski, 09' Saito,Sasada,Suda, 18')

$\mathcal{W}^{\varepsilon}$ converge vers $f := (f_1, f_2)$ où pour $(u,k) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}$:

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k).$$

Échelle mésoscopique

$$\mathcal{L}_B[f_i](t,x,k) = \sum_{j=1}^{2}\int_{\mathbb{T}} \theta_i^2(k)R(k,k')\theta_j^2(k')\left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k)\right)dk'.$$

Ici :

$$\mathbf{v}_B(k) = \frac{4\pi\sin(\pi k)\cos(\pi k)}{\sqrt{\sin^2(\pi k) + \frac{B^2}{4}}} \qquad R(k,k') = 16\sin^2(\pi k)\sin^2(\pi k').$$

$$\theta_1(k) = \left(\frac{1}{2} + \frac{B}{4\sqrt{\sin^2(\pi k) + \frac{B^2}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \theta_2(k) = \left(\frac{1}{2} - \frac{B}{4\sqrt{\sin^2(\pi k) + \frac{B^2}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Processus de Lévy

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Soient $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$.

Soient $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Soit ν une mesure de Lévy sur $\mathbb{R}$, id est :

$$\int_{\mathbb{R}^*} \min\left(1, r^2\right) d\nu(r) < \infty.$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Soient $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Soit ν une mesure de Lévy sur $\mathbb{R}$, id est :

$$\int_{\mathbb{R}^*} \min\left(1, r^2\right) d\nu(r) < \infty.$$

On dit que Y_x est un processus de Lévy partant de $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}\left[\exp\left(\mathbf{i}\theta Y_x(t)\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(t\Phi_Y(\theta) + \mathbf{i}\theta x\right)\right],$$

avec :

$$\Phi_Y(\theta) = \mathbf{i}b\theta - \frac{a}{2}\theta^2 + \int_{\mathbb{R}^*} \left(\exp\left(\mathbf{i}\theta r\right) - 1 - \mathbf{i}\theta r\right) d\nu(r).$$

Soient $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Soit ν une mesure de Lévy sur $\mathbb{R}$, id est :

$$\int_{\mathbb{R}^*} \min\left(1, r^2\right) d\nu(r) < \infty.$$

On dit que Y_x est un processus de Lévy partant de $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}\left[\exp\left(\mathbf{i}\theta Y_x(t)\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(t\Phi_Y(\theta) + \mathbf{i}\theta x\right)\right],$$

avec :

$$\Phi_Y(\theta) = \mathbf{i}b\theta - \frac{a}{2}\theta^2 + \int_{\mathbb{R}^*} \left(\exp\left(\mathbf{i}\theta r\right) - 1 - \mathbf{i}\theta r\right) d\nu(r).$$

- Si $b = \nu = 0$ alors $Y_x(\cdot) := B_x(\cdot)$ où $B_x(\cdot)$ est un Mouvement Brownien.

Soient $b \in \mathbb{R}$ et $a > 0$. Soit ν une mesure de Lévy sur $\mathbb{R}$, id est :

$$\int_{\mathbb{R}^*} \min\left(1, r^2\right) d\nu(r) < \infty.$$

On dit que Y_x est un processus de Lévy partant de $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}\left[\exp\left(\mathbf{i}\theta Y_x(t)\right)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left(t\Phi_Y(\theta) + \mathbf{i}\theta x\right)\right],$$

avec :

$$\Phi_Y(\theta) = \mathbf{i}b\theta - \frac{a}{2}\theta^2 + \int_{\mathbb{R}^*} \left(\exp\left(\mathbf{i}\theta r\right) - 1 - \mathbf{i}\theta r\right) d\nu(r).$$

- Si $b = \nu = 0$ alors $Y_x(\cdot) := B_x(\cdot)$ où $B_x(\cdot)$ est un Mouvement Brownien.
- Soit $\lambda > 0$, si $a = b = 0$ et $\nu := \lambda\delta_1$ alors $Y_x(\cdot)$ est un processus de Poisson de paramètre λ.

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$$\Phi_Y(\theta) = \mathbf{i}b\theta - \frac{a}{2}\theta^2 + \int_{\mathbb{R}^*} (\exp(\mathbf{i}\theta r) - 1 - \mathbf{i}\theta r)\, d\nu(r).$$

$$\Phi_Y(\theta) = \mathbf{i}b\theta - \frac{a}{2}\theta^2 + \int_{\mathbb{R}^*} (\exp(\mathbf{i}\theta r) - 1 - \mathbf{i}\theta r)\, d\nu(r).$$

Le générateur de Y_x noté $\mathcal{D}$ est défini par :

$$\mathcal{D}[\psi](\theta) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}[\psi(Y_\theta(t))] - \psi(\theta)}{t}.$$

GAËTAN CANE LJAD, UCA

$$\Phi_Y(\theta) = \mathbf{i}b\theta - \frac{a}{2}\theta^2 + \int_{\mathbb{R}^*} (\exp(\mathbf{i}\theta r) - 1 - \mathbf{i}\theta r)\, d\nu(r).$$

Le générateur de Y_x noté $\mathcal{D}$ est défini par :

$$\mathcal{D}[\psi](\theta) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}[\psi(Y_\theta(t))] - \psi(\theta)}{t}.$$

On a :

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}[\psi])(\theta) = \Phi_Y(\theta)\mathcal{F}[\psi](\theta).$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$$\Phi_Y(\theta) = \mathbf{i}b\theta - \frac{a}{2}\theta^2 + \int_{\mathbb{R}^*} (\exp(\mathbf{i}\theta r) - 1 - \mathbf{i}\theta r)\, d\nu(r).$$

Le générateur de Y_x noté $\mathcal{D}$ est défini par :

$$\mathcal{D}[\psi](\theta) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}[\psi(Y_\theta(t))] - \psi(\theta)}{t}.$$

On a :

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}[\psi])(\theta) = \Phi_Y(\theta)\mathcal{F}[\psi](\theta).$$

- Si $b = \nu = 0$ alors $\mathcal{D} = \Delta$.

Processus α-stable et générateur infinitésimal

$$\Phi_Y(\theta) = \mathbf{i}b\theta - \frac{a}{2}\theta^2 + \int_{\mathbb{R}^*} (\exp(\mathbf{i}\theta r) - 1 - \mathbf{i}\theta r)\, d\nu(r).$$

Le générateur de Y_x noté $\mathcal{D}$ est défini par :

$$\mathcal{D}[\psi](\theta) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{E}[\psi(Y_\theta(t))] - \psi(\theta)}{t}.$$

On a :

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}[\psi])(\theta) = \Phi_Y(\theta)\mathcal{F}[\psi](\theta).$$

- Si $b = \nu = 0$ alors $\mathcal{D} = \Delta$.
- Soit α dans $(1,2)$ et $b = a = 0$. Si $d\nu(r) = |r|^{-\alpha-1}$ on a :

$$\Phi_Y(\theta) = -|\theta|^\alpha.$$

Processus α-stable et générateur infinitésimal

$$\Phi_Y(\theta) = \mathbf{i}b\theta - \frac{a}{2}\theta^2 + \int_{\mathbb{R}^*} (\exp(\mathbf{i}\theta r) - 1 - \mathbf{i}\theta r)\, d\nu(r).$$

Le générateur de Y_x noté $\mathcal{D}$ est défini par :

$$\mathcal{D}[\psi](\theta) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{E}[\psi(Y_\theta(t))] - \psi(\theta)}{t}.$$

On a :

$$\mathcal{F}(\mathcal{D}[\psi])(\theta) = \Phi_Y(\theta)\mathcal{F}[\psi](\theta).$$

- Si $b = \nu = 0$ alors $\mathcal{D} = \Delta$.
- Soit α dans $(1,2)$ et $b = a = 0$. Si $d\nu(r) = |r|^{-\alpha-1}$ on a :

  $$\Phi_Y(\theta) = -|\theta|^\alpha.$$

  Alors :

  $$\mathcal{D} := -(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Rappel :

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Rappel : $\mathcal{W}^{\varepsilon} \to f := (f_1, f_2)$ où pour $(x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$:

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi} \partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

Retour sur l'équation de Boltzmann linéaire

Rappel : $\mathcal{W}^{\varepsilon} \to f := (f_1, f_2)$ où pour $(x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$:

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi} \partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) \quad = \quad \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \theta_i^2(k) R(k,k') \theta_j^2(k') \left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k) \right) dk'$$

Retour sur l'équation de Boltzmann linéaire

Rappel : $\mathcal{W}^\varepsilon \to f := (f_1, f_2)$ où pour $(x,k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$:

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi} \partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) &= \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \theta_i^2(k) R(k,k') \theta_j^2(k') \left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k) \right) dk' \\
&= \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i) \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j) \left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k) \right).
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}_B$ est le générateur infinitésimal d'un processus de saut.

Processus markoviens de sauts

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i) \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j)\left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k)\right).$$

Processus markoviens de sauts

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i) \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j)\left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k)\right).$$

On définit un processus stochastique $(K(\cdot), I(\cdot))$ par :

Processus markoviens de sauts

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i) \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j)\left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k)\right).$$

On définit un processus stochastique $(K(\cdot), I(\cdot))$ **par :**

- $(K(0), I(0)) = (k,i)$.

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i) \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j)\left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k)\right).$$

On définit un processus stochastique $(K(\cdot), I(\cdot))$ par :

- $(K(0), I(0)) = (k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda_B(k,i)$.

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i)\int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j)\left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k)\right).$$

On définit un processus stochastique $(K(\cdot), I(\cdot))$ **par :**

- $(K(0), I(0)) = (k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda_B(k,i)$.
- Le processus passe de (k,i) à (k',j) avec probabilité $P_B(k,i,k',j)$.

Processus markoviens de sauts

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i) \int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j) \left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k) \right).$$

On définit un processus stochastique $(K(\cdot), I(\cdot))$ **par :**

- $(K(0), I(0)) = (k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda_B(k,i)$.
- Le processus passe de (k,i) à (k',j) avec probabilité $P_B(k,i,k',j)$.

On définit :

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\, ds.$$

Processus markoviens de sauts

$$\partial_t f_i(t,x,k) + \frac{\mathbf{v}_B(k)}{2\pi}\partial_x f_i(t,x,k) = \mathcal{L}_B[f_i](t,x,k),$$

avec :

$$\mathcal{L}_B[f_i](x,k,t) = \sum_{j=1}^{2} \lambda_B(k,i)\int_{\mathbb{T}} P_B(k,i,dk',j)\left(f_i(t,x,k') - f_j(t,x,k)\right).$$

On définit un processus stochastique $(K(\cdot), I(\cdot))$ **par :**

- $(K(0), I(0)) = (k,i)$.
- Le processus attend durant un temps $\lambda_B(k,i)$.
- Le processus passe de (k,i) à (k',j) avec probabilité $P_B(k,i,k',j)$.

On définit :

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\,ds.$$

Alors :

$$f_i(t,x,k) = \mathbb{E}_{(k,i)}\left[f^0_{I(t)}(Z_x(t), K(t))\right].$$

Étude d'une marche aléatoire particulière

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

On rappelle que :

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\, ds.$$

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

On rappelle que :

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\, ds.$$

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t.

On rappelle que :

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\, ds.$$

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t. Alors :

$$Z_x(t) = x + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \lambda_B(K_n, I_n)\mathbf{v}_B(K_n).$$

Étude d'une marche aléatoire particulière

On rappelle que :

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\,ds.$$

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t. Alors :

$$Z_x(t) = x + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \lambda_B(K_n, I_n)\mathbf{v}_B(K_n).$$

On définit :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \quad \text{si} \quad B \neq 0 \quad \alpha_B = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad B = 0.$$

On rappelle que :

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\, ds.$$

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t. Alors :

$$Z_x(t) = x + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \lambda_B(K_n, I_n)\mathbf{v}_B(K_n).$$

On définit :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \quad \text{si} \quad B \neq 0 \quad \alpha_B = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad B = 0.$$

On note π_B la mesure invariante de $(K_n, I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On rappelle que :

$$\forall t \geq 0, \quad Z_x(t) = x + \frac{1}{2\pi}\int_0^t \mathbf{v}_B(K(s))\,ds.$$

On note $\mathcal{N}_t$ le nombre de saut jusqu'au temps t. Alors :

$$Z_x(t) = x + \sum_{n=1}^{\mathcal{N}_t} \lambda_B(K_n, I_n)\mathbf{v}_B(K_n).$$

On définit :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \quad \text{si} \quad B \neq 0 \quad \alpha_B = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad B = 0.$$

On note π_B la mesure invariante de $(K_n, I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $r \neq 0$, alors on a :

$$\lim_{N\to\infty} N^{\alpha_B}\pi_B(\{(k,i)|, \quad \lambda_B(k,i)\mathbf{v}_B(k) > Nr\}) = \begin{cases} |r|^{-\frac{3}{2}} & \text{si} \quad B = 0. \\ |r|^{-\frac{5}{3}} & \text{si} \quad B \neq 0. \end{cases}$$

Théorème (Jara,Olla,Komorowski, 10' Saito,Sasada,Suda, 18')

Les lois finis-dimensionnelles de $N^{-1}Z_x(N^{\alpha_B}\cdot)$ *converge faiblement vers* $Y_{x,B}(\cdot)$ *où* $Y_{x,B}(\cdot)$ *est un processus de Lévy de mesure* $d\nu(r) := |r|^{-\alpha_B - 1}$.

Théorème (Jara,Olla,Komorowski, 10' Saito,Sasada,Suda, 18')

Les lois finis-dimensionnelles de $N^{-1} Z_x \left(N^{\alpha_B} \cdot\right)$ *converge faiblement vers* $Y_{x,B}(\cdot)$ *où* $Y_{x,B}(\cdot)$ *est un processus de Lévy de mesure* $d\nu(r) := |r|^{-\alpha_B - 1}$.

Le générateur infinitésimal de $Y_{x,B}(\cdot)$ **est** $-(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}$**.**

Théorème (Jara,Olla,Komorowski, 10' Saito,Sasada,Suda, 18')

Les lois finis-dimensionnelles de $N^{-1}Z_x\left(N^{\alpha_B}\cdot\right)$ *converge faiblement vers* $Y_{x,B}(\cdot)$ *où* $Y_{x,B}(\cdot)$ *est un processus de Lévy de mesure* $d\nu(r) := |r|^{-\alpha_B-1}$*.*

Le générateur infinitésimal de $Y_{x,B}(\cdot)$ est $-(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}$.

Soit ρ la solution sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ de :

$$\begin{cases} \partial_t\rho(t,x) = -D(-\Delta_x)^{\frac{\alpha_B}{2}}\rho(t,x), \\ \rho(0,x) = \rho^0(x). \end{cases} \quad \boxed{\text{Échelle macroscopique}} \qquad (1)$$

Limites hydrodynamiques

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Processus de saut

Limite hydro

Théorème (Jara,Olla,Komorowski, 10' Saito,Sasada,Suda, 18')

Les lois finis-dimensionnelles de $N^{-1} Z_x(N^{\alpha_B} \cdot)$ converge faiblement vers $Y_{x,B}(\cdot)$ où $Y_{x,B}(\cdot)$ est un processus de Lévy de mesure $d\nu(r) := |r|^{-\alpha_B - 1}$.

Le générateur infinitésimal de $Y_{x,B}(\cdot)$ est $-(-\Delta)^{\frac{\alpha_B}{2}}$.

Soit ρ la solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ de :

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) = -D(-\Delta_x)^{\frac{\alpha_B}{2}} \rho(t,x), \\ \rho(0,x) = \rho^0(x). \end{cases} \quad \text{Échelle macroscopique} \tag{1}$$

Théorème (Jara,Olla,Komorowski, 10' Saito,Sasada,Suda, 18')

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{2} \int_{\mathbb{T}} \left| f_i(N^{\alpha_B} t, xN, k) - \frac{1}{2}\rho(t,x) \right|^2 dk = 0.$$

Bilan provisoire et nouvelle question

L'hypothèse naturelle sur notre système était :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum_{y \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon y) \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon} [e_x(0)] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u) J(u) du.$$

Bilan provisoire et nouvelle question

L'hypothèse naturelle sur notre système était :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum_{y \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon y) \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon} \left[e_x(0) \right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u) J(u) du.$$

La question était :

Peut-on obtenir une équation pour $\mathcal{W}(t,u)$?

Bilan provisoire et nouvelle question

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

L'hypothèse naturelle sur notre système était :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum_{y \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon y) \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon} [e_x(0)] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u) J(u) du.$$

La question était :

Peut-on obtenir une équation pour $\mathcal{W}(t,u)$?

OUI et l'équation est :

$$\partial_t \mathcal{W}(t,x) = -D(-\Delta_x)^{\frac{\alpha_B}{2}} \mathcal{W}(t,x),$$

où :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \quad \text{si} \quad B \neq 0 \quad \textit{et} \quad \alpha_B = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad B = 0.$$

Bilan provisoire et nouvelle question

L'hypothèse naturelle sur notre système était :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \sum_{y\in\mathbb{Z}} J(\varepsilon y)\mathbb{E}_{\mu^\varepsilon}\left[e_x(0)\right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u)J(u)du.$$

La question était :

Peut-on obtenir une équation pour $\mathcal{W}(t,u)$?

OUI et l'équation est :

$$\partial_t \mathcal{W}(t,x) = -D\left(-\Delta_x\right)^{\frac{\alpha_B}{2}} \mathcal{W}(t,x),$$

où :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \quad \text{si} \quad B \neq 0 \quad et \quad \alpha_B = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad B = 0.$$

- Limite en une étape pour $B = 0$ **[Jara,Olla,Komorowski '15]** .

Bilan provisoire et nouvelle question

L'hypothèse naturelle sur notre système était :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \sum_{y \in \mathbb{Z}} J(\varepsilon y) \mathbb{E}_{\mu^\varepsilon} \left[e_x(0) \right] = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_0(u) J(u) du.$$

La question était :

Peut-on obtenir une équation pour $\mathcal{W}(t,u)$?

OUI et l'équation est :

$$\partial_t \mathcal{W}(t,x) = -D(-\Delta_x)^{\frac{\alpha_B}{2}} \mathcal{W}(t,x),$$

où :

$$\alpha_B = \frac{5}{3} \quad \text{si} \quad B \neq 0 \quad \textit{et} \quad \alpha_B = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad B = 0.$$

- Limite en une étape pour $B = 0$ **[Jara,Olla,Komorowski '15]** .

Que se passe-t-il si on pose $B_N := BN^{-\delta}$ avec $B \neq 0$ et $\delta > 0$?

Un processus d'interpolation

GAËTAN CANE
LJAD, UCA

Soit $B_N := BN^{-\delta}$ avec $B \neq 0$ et $\delta > 0$.

Un processus d'interpolation

Soit $B_N := BN^{-\delta}$ avec $B \neq 0$ et $\delta > 0$. On définit :

$$\alpha_\delta = \frac{5-\delta}{3} \quad \text{si} \quad \delta < \frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad \alpha_\delta = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad \delta \geq \frac{1}{2}.$$

Un processus d'interpolation

Soit $B_N := BN^{-\delta}$ avec $B \neq 0$ et $\delta > 0$. On définit :

$$\alpha_\delta = \frac{5-\delta}{3} \quad \text{si} \quad \delta < \frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad \alpha_\delta = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad \delta \geq \frac{1}{2}.$$

Maintenant on travaille avec un tableau $(K_n^N, I_n^N)_{n \in \mathbb{N}}$.

Un processus d'interpolation

Soit $B_N := BN^{-\delta}$ avec $B \neq 0$ et $\delta > 0$. On définit :

$$\alpha_\delta = \frac{5-\delta}{3} \quad \text{si} \quad \delta < \frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad \alpha_\delta = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad \delta \geq \frac{1}{2}.$$

Maintenant on travaille avec un tableau $(K_n^N, I_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$.
On note π_{B_N} la mesure invariante de $(K_n^N, I_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$.

Un processus d'interpolation

Soit $B_N := BN^{-\delta}$ avec $B \neq 0$ et $\delta > 0$. On définit :

$$\alpha_\delta = \frac{5-\delta}{3} \quad \text{si} \quad \delta < \frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad \alpha_\delta = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad \delta \geq \frac{1}{2}.$$

Maintenant on travaille avec un tableau $(K_n^N, I_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$.
On note π_{B_N} la mesure invariante de $(K_n^N, I_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $r \neq 0$ alors :

$$\lim_{N\to\infty} N^{\alpha_\delta}\pi_{B_N}(\{(k,i)|, \quad \lambda_{B_N}(k,i)\mathbf{v}_{B_N}(k) > Nr\}) := \nu_\delta = \begin{cases} |r|^{-\frac{3}{2}} & \text{si} \quad \delta > \frac{1}{2}, \\ \nu_B(r) & \text{si} \quad \delta = \frac{1}{2}, \\ |r|^{-\frac{5}{3}} & \text{si} \quad \delta < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Un processus d'interpolation

Soit $B_N := BN^{-\delta}$ avec $B \neq 0$ et $\delta > 0$. On définit :

$$\alpha_\delta = \frac{5-\delta}{3} \quad \text{si} \quad \delta < \frac{1}{2} \quad \textit{et} \quad \alpha_\delta = \frac{3}{2} \quad \text{si} \quad \delta \geq \frac{1}{2}.$$

Maintenant on travaille avec un tableau $(K_n^N, I_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$.
On note π_{B_N} la mesure invariante de $(K_n^N, I_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $r \neq 0$ alors :

$$\lim_{N\to\infty} N^{\alpha_\delta}\pi_{B_N}(\{(k,i)|, \quad \lambda_{B_N}(k,i)\mathbf{v}_{B_N}(k) > Nr\}) := \nu_\delta = \begin{cases} |r|^{-\frac{3}{2}} & \text{si} \quad \delta > \frac{1}{2}, \\ \nu_B(r) & \text{si} \quad \delta = \frac{1}{2}, \\ |r|^{-\frac{5}{3}} & \text{si} \quad \delta < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Théorème (Cane '21)

Les lois finis-dimensionnelles de $N^{-1}Z_{Nx}^N(N^{\alpha_\delta}\cdot)$ converge faiblement vers $Y_{x,\delta}(\cdot)$ où $Y_{x,\delta}(\cdot)$ est un processus de Lévy de mesure ν_δ.

Une EDP d'interpolation

Le genérateur infinitésimal de $Y_{x,\delta}$ est l'opérateur $\mathcal{D}_\delta$ où :

$$\mathcal{D}_\delta[\psi](y) = \begin{cases} -(-\Delta_x)^{\frac{3}{4}}[\psi](y) & \text{si} \quad \delta > \frac{1}{2}, \\ \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\psi](\xi)\Phi_B(\xi)\exp(2\mathbf{i}x\xi)\,d\xi & \text{si} \quad \delta = \frac{1}{2}, \\ -(-\Delta_x)^{\frac{5}{6}}[\psi](y) & \text{si} \quad \delta < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Une EDP d'interpolation

Le genérateur infinitésimal de $Y_{x,\delta}$ est l'opérateur $\mathcal{D}_\delta$ où :

$$\mathcal{D}_\delta[\psi](y) = \begin{cases} -(-\Delta_x)^{\frac{3}{4}}[\psi](y) & \text{si} \quad \delta > \frac{1}{2}, \\ \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\psi](\xi)\Phi_B(\xi)\exp(2\mathbf{i}x\xi)\,d\xi & \text{si} \quad \delta = \frac{1}{2}, \\ -(-\Delta_x)^{\frac{5}{6}}[\psi](y) & \text{si} \quad \delta < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Soit ρ la solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ de l'EDP :

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t,x) = \mathcal{D}_\delta[\rho](t,x) \\ \rho(0,x) = \rho^0(x). \end{cases}$$

Une EDP d'interpolation

Gaëtan Cane
LJAD, UCA

Le générateur infinitésimal de $Y_{x,\delta}$ est l'opérateur $\mathcal{D}_\delta$ où :

$$\mathcal{D}_\delta[\psi](y) = \begin{cases} -(-\Delta_x)^{\frac{3}{4}}[\psi](y) \quad \text{si} \quad \delta > \frac{1}{2}, \\ \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}[\psi](\xi)\Phi_B(\xi)\exp(2\mathbf{i}x\xi)\,d\xi \quad \text{si} \quad \delta = \frac{1}{2}, \\ -(-\Delta_x)^{\frac{5}{6}}[\psi](y) \quad \text{si} \quad \delta < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Soit ρ la solution sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ de l'EDP :

$$\begin{cases} \partial_t\rho(t,x) = \mathcal{D}_\delta[\rho](t,x) \\ \rho(0,x) = \rho^0(x). \end{cases}$$

Théorème (Cane '21)

$$\forall t\in[0,T], \quad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{2}\int_{\mathbb{T}}\left|f_i^N(N^{\alpha_\delta}t, Nx, k) - \rho(t,x)\right|^2 dk = 0.$$